RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA 154.

MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED.

33.

U ZAGREBU 1903.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE (DIONIČKE TISKARE).

Digitized by Google

Dionička tiskara u Zagrebu.

Digitized by Google

Sadržaj.

	Strana
Novo nalazište jesetre atlantske, Acipenser sturio L. Od M. Katurića	1—6
O zakonu recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija u tijelu imaginarnih brojeva. Od dra. Stjepana Bohničeka	7—80
Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga. Od dra. Vladimira Varićaka	81—131
O nul-mjestima gibanja tekućine. Od dra. Stanka Hondla	132—171

Digitized by Google

Digitized by Google

Novo nalazište jesetre atlantske,

Acipenser sturio L.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 26. travnja 1903.

Napisao M. Katurić.

Još u septembru g. 1891. za moga putovanja u Crnu Goru, da doznam, koje se vrste slatkovodnih riba nahode u tim vodama[1], nijesam uspio saznati, koja vrsta jesetre živi u Skadarskom jezeru, premda se po kazivanju svakako neka vrsta pod imenom „levrek“ morala tu nahoditi.

Iza povratka iz Crne Gore nijesam propustio, da se i dalje izvještim o tome, i nastojao sam, da mi iz toga jezera bar jedan primjerak pomenute vrste dogje do ruku. Pisao sam i preporučivao na sve strane, ali sve uzalud.

Prijateljskomu nastojanju prečasnoga oca gosp. P. Bardhija, učitelja arbanaskoga jezika u ovdašnjem c. k. učiteljištu, imam jedino blagodariti, da sam poslije toliko vremena očekivanja najposlije dobio dugo žugjeni predmet.

U avgustu prošle godine stiže mi „levrek“, ali kakvo je bilo moje začugjenje, kad otvorih kutiju, ne može se opisati. Mjesto neke jesetre vidjeh preda mnom ništa manje nego jednoga preko 80 % duga „smuduta“ ili „lubina“ ili, kako ga ovdje zovu, „brancina“ (*Labrax lupus* Cuv.). Nije mi ostalo drugo već slaba utjeha, da sam bar i ja konstatovao, kao što je prije mene i Steindachner[2], da ta vrsta morske ribe zaista živi u Skadarskom jezeru. Tek kasnije doznah od vrloga mi prijatelja profesora S. Brusine, da je

[1] Просвјета, Цетиње 1892.

[2] Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, LXXXVI. Band, I. und II. Heft, Jahrgang 1882., Juni und Juli, I. Abt., Wien 1882.

Digitized by Google

„blin“ arbanasko ime za jesetru, dok je za „smuduta“ arbanasko ime „levrek“.

Preko spomenutoga gospodina, moga kolege u c. k. učiteljištu, lako sada dogjoh do prave jesetre. I zaista 9. aprila primih iz Skadra jedan primjerak ulovljen u Skadarskom jezeru. Primjerak je 75 ^{cm} dug i bez utrobe oko 2 ^{kg} težak, a pripada vrsti *Acipenser sturio* L. Kod druge ću prilike što potanje o njemu izvijestiti.

Vrlo mi je milo, što sam najposlije saznao, koja upravo vrsta jesetre živi u Skadarskom jezeru, ne samo poradi dopunjenja već do sada poznatih crnogorskih slatkovodnih riba, već i zato, da se jednom razbistri pitanje, otkuda dospijeva u naše more vrsta *Acipenser stellatus* Pall., od koje sam god. 1899. jedan primjerak poklonio vrlomu i odličnomu prijatelju S. Brusini za zbirku narod. zoologijskoga muzeja u Zagrebu.

Ne bih se tako lako upuštao u razlaganje ovoga predmeta, da nemam pred sobom već gotovo djelo prof. Brusine, koji svojom novom kritičnom raspravom o našim jesetrama[1] otvora nam put boljemu razumijevanju i procjenjivanju ovoga dosta zamršenog pitanja. Ovaj je predmet on tako svestrano pretresao, da mi gotovo ne treba uzeti u obzir druge pisce, jer ih je on gotovo sve naveo i kritično proučio.

Odmah u početku ove svoje radnje vidi se, koliko mu je na srcu bio „blin“, da jednom dozna, koja je upravo ta vrsta jesetre. Pri daljem raspravljanju odregjuje, da evropskih jesetara imaju dvije vrste, evrazijskih pet, azijskih pet i amerikanske četiri, a uz ove četiri još jedna odlika ili suvrsta tipičke evropske vrste *A. sturio*. Od njih kaže da je za četiri dokazano, da se nahode i u Jadranskom moru, i to dvije evropske t. j. *Acipenser sturio* L. i *Acipenser Heckeli* Fitz., i dvije evrazijske t. j. *Acipenser huso* L. i *Acipenser stellatus* Pall.

Ja ću se ovdje ograničiti samo na ove četiri vrste, koje se nahode u Jadranskom moru, i to samo toliko, koliko se tiče pitanja, otkuda u naše more dolazi *A. stellatus* Pall.

Evo što Brusina o tome osim ostaloga piše: *Acipenser huso* L. = Jesetra moruna[2]. „Hab. Dosta obična riba u slavonskom i srpskom Dunavu od ušća Drave do Timoka, u Dravi, Savi i Kupi. Rijetko kada zaluta do zapadnih obala Jadranskoga mora, i to

[1] Naše jesetre. Preštampano iz 149. knjige „Rada“ Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. U Zagrebu 1902.

[2] Op. cit. str. 45. i 46.

Digitized by Google

rijetko pojedince, koji put jatomice.“ Pa još dalje: „Ne može više biti sumnje, da *A. huso* sa Crnog mora zaluta do Jadranskoga mora. Prvi se bilježeni slučaj ima upisati u zasluge Heckel-a, kad je 1850. god. na mletačkom ribjem trgu našao mladu ribu ove vrste od $2^1/_2$ stope duljine. To nam Steindachner ponovno potvrgjuje. — U muzeju mletačkog zavoda za znanosti, književnosti i umjetnosti bilo je 5 primjeraka od *A. huso.*“

Acipenser Heckeli Fitz. = Jesetra jadranska[1]. „Hab. Zapadna obala Jadranskog mora; još nije dokazano, da bi zalutala do Kvarnera i do dalmatinskih obala. — Prof. Matisz mi piše, da jesetre, koje se rijetko kada prodavaju na riječkoj ribaonici, dolaze obično iz Trsta. S druge strane drži, da je vidio i *A. Heckeli* iz Kvarnera. Megjutim kad znamo, da moruna, a može biti i pastruga dolazi iz Crnog mora, moglo bi se još pristati, da i po koji *A. Heckeli* sa talijanske obale zaluta do hrvatske, pače u čudu smo, što se to nije dosele dogodilo; al vjerovatnije je, da nije bilo motritelja. Tko zna n. pr., da jesetre, koje prolaze tijesnom od otoka Sestrunja i Uljana, nijesu može biti talijanske jesetre, koje idu do Novigradskog mora?“

Acipenser sturio L. = Jesetra atlantska[2]. „Hab. Najobičnija jesetra Jadranskog mora drži se isto tako zapadnih kao što i istočnih obala; puno ih više ima po mletačkim obalama. Ulazi u sve veće talijanske rijeke, pače po Dr. Scarpi mlade zalutaju i u manje rijeke, n. pr. do Trevisa.“

Acipenser stellatus Pall. = Jesetra pastruga[3]. „Hab. Pastruga je rijetka u Dunavu od ušća Drave do Timoka, još je regja u donjem toku same Drave i Save; za prvu rijeku već su ju zabilježili Heckel i Kner. — Što se Jadranskog mora tiče, stalno je, da su ulovljene pastruge uz obale sjeverne Dalmacije, al nije dokazano, da dolaze k nam iz Crnog mora, dok može biti da potječu iz Crnegore i Arbanije.“

Pa dalje: „Neočekivano pojavljanje pastruga u Jadranskom moru tako je svakoga iznenadilo, te je malo tko bio, u koga se nije o tom porodila sumnja. Za to nije na čudo, što je Carus u svom „Prodromusu“ faune Sredozemnog mora pred *A. stellatus* stavio dva upitnika. — Kako znamo iz pregleda literature, Perugia je prvi objavio učenom svijetu, kad je tršćanski muzej, ne znamo

[1] Op. cit. str. 51. i 52.
[2] Op. cit. str. 53. i 54.
[3] Op. cit. str. 55., 56., 57., 58., 59. i 60.

Digitized by Google

kako, došao do te ribe iz zadarske okolice. Iste ju je godine opisao u svom izvrsnom popisu jadranskih riba. — Prošlo je više godina, al o pastruzi nema opet ni traga ni glasa. Kad evo javio se Trois, komu je u ruke dopao drugi primjerak. Mjeseca studenoga 1895. god. uz druge neke ribe, što ih je nabavio na mletačkoj ribaonici, dobio je glavu od pastruge donesene iz Dalmacije."

Pa još dalje: „Ne progje mnogo vremena i eto treće pastruge iz Dalmacije. Odlični prijatelj Katurić iznenadio me je ovim pismom:"

U ovom pismu opisao sam ulovljeni primjerak i pri kraju primijetih ovo: „Takovih riba (t. j. jesetara) nije do sada nagjeno u nijednoj dalmatinskoj rijeci. Usugjujem se naprotiv izreći mnijenje, da je ova vrsta ribe po svoj prilici Bojanom ušla u Jadransko more. Na to mišljenje navodi me okolnost, da te ribe ne samo nema u dalmatinskim rijekama, već je nema ni u talijanskim, dočim znam pouzdano, da se u Skadarskom blatu češće lovi jesetra, koja je tamo poznata pod imenom „lèvrek", a možda je to baš *A. stellatus* ili koja druga vrsta".

Na ovo moje pismo, gdje sam spomenuo ime „levreka", kako su me na Cetinju uvjeravali, da je to baš ime skadarske jesetre, Brusina primjećuje: „Pošto me je to veoma zanimalo, pisao sam odličnom sudrugu i prijatelju A. Dobriloviću, koji javlja, da je „levrek" arbanasko ime smuduta = *Dicentrarchus labrax* (L.) iz Bojane i Skadarskog jezera, dok je „blin" arbanasko ime jesetre, koja dolazi sa Drine u Skadarsko jezero." — Morao sam istu stvar ponovno ovdje istaknuti, jer nam A. Dobrilović čisto kaže, da blin dolazi sa Drine u Skadarsko jezero, što ja i vjerujem, jer ni Steindachner[1] ni ja[2] nijesmo našli traga jesetrama u crnogorskim rijekama, koje utječu u ovo jezero.

Brusina dalje prihvaća: „Kako su mi baš u zadnje vrijeme, i nakon toliko godina teške službe, ponovno naprtili dvostruk posao, bez ikakvog obzira, dok je posla bilo svakim danom više, jer je nar. zoologijski muzej svakim danom veći, to sam se morao izlomiti na sve strane, te veoma žalim, što nijesam dospio proučiti Katurićevu pastrugu i druge jesetre, koje sam za to pri mom stolu bio priredio. S druge strane htio sam čekati, neka on riješi pitanje arbanasko-crnogorskog blina. — Slažem se sasvim, da jadranska pastruga dolazi može biti iz Drine, ali nipošto iz dalmatinskih

[1] Op. cit. str. 71—73.
[2] Op. cit.

Digitized by Google

rijeka, pošto je stalno. da tamo nema jesetara. S druge je strane vjerovatno, da Drina, a može biti, još više prostrane lagune i druge rijeke arbanaske od Kavaja do Avlone hrane koju jesetru, a da su navedene tri odanle zabasale do Dalmacije."

Najposlije pri svršetku opisa vrste *A. stellatus* Brusina piše: „Slaže li se pak Katurićev primjerak s onim tršćanskog muzeja, razlikuju li se zadarske jesetre od skadarskog blina, i dolaze li baš odanle k nama, na ta pitanja mi danas ne možemo odgovoriti."

Pitanje, otkle dolazi u naše more jesetra pastruga, nije se moglo riješiti ili bar primaknuti riješenju, dok nijesmo bili na čistu, koja baš vrsta jesetre živi u Skadarskom jezeru. Sada pak, kad znamo, da se u tom jezeru nahodi vrsta *Acipenser sturio* L. = Jesetra atlantska, a po onome, što mogoh do danas razabrati, druge vrste jesetara nijesu tamo poznate, i kad po izvješću A. Dobrilovića „blin" dospije u jezero samo kroz Drinu, posve je razumljivo, da u Jadransko more kroz Drinu ili Bojanu može dospjeti sama Jesetra atlantska t. j. *Acipenser sturio* L.

A otkle dolazi onda pastruga t. j. *A. stellatus?* Držim, da ne će biti teško na ovo pitanje odgovoriti. Sada nam ne ostaje drugo nego misliti, ili da (kako Brusina drži) prostrane lagune i druge rijeke arbanaske od Kavaja do Avlone baš hrane ovakovu vrstu, ili da one zalutaju od Crnoga do Jadranskoga mora.

Kako se razabira iz ovoga moga izvješća, ja sam do sada bio istoga mnijenja, kao i moj vrli prijatelj Brusina, ali danas, kad sam se uvjerio, da u Skadarskom jezeru, u Drini i u Bojani nema te vrste jesetre, a po svoj prilici ne će je biti ni u ostalim arbanaskim rijekama, radije držim, da ona zaista zaluta od Crnoga do našega mora. S druge strane i Brusina nije odlučno protivan toj mogućnosti, kako se razumije iz onoga, što piše o vrsti *A. Heckeli;* a što se tiče vrste *A. huso*, on nema nikakve sumnje, da gdjekada zaluta do zapadnih obala našega mora, što potvrgjuju i neki drugi ihtiolozi.

Sada smo na čistu i o vrsti *A. sturio*. Ovdje je navedeno, kako Brusina, a i mnogi drugi ihtiolozi tvrde, da je najobičnija jesetra našega mora i da se drži isto tako zapadnih, kao i istočnih obala, samo da je mnogo više ima po mletačkim obalama. Prlje nam je moglo biti za čudo, kako istočnu obalu pohagja često *A. sturio,* dok nije dokazano, da to ikada biva i s vrstom *A. Heckeli.* Vrsta *A. sturio,* koja se lovi na istočnoj obali, dolazi u naše more od Drine i od Skadarskoga jezera preko Bojane, a po svoj prilici i

Digitized by Google

kroz druge rijeke arbanaske, dok za *A. Heckeli* nije poznato, da je imaju rijeke istočne obale Jadranskoga mora.

Brusina tvrdi, da za *A. stellatus* nije dokazano, da dolazi k nama iz Crnoga mora, a ja držim, da je toliko dokazano za *A. stellatus*, koliko i za *A. huso*, samo što *A. huso* voli zapadnu obalu našega mora, dok se *A. stellatus* radije drži istočne obale, valjada zato, što je prva vrsta jača, a ova druga slabija i manja, te ne smije da se otisne u široko more, već se u svome zalutanju drži uvijek kraja.

Dapače u velikom se čudu moramo zapitati, kako nijesmo radije očekivali, da ćemo u crnogorskim i arbanaskim vodama prije naći *A. sturio* nego li *A. stellatus*, jer se prva vrsta često ulovi na istočnoj obali Jadranskoga mora, a druga je vrsta sasvijem rijetka. S druge strane kad promislimo, da i za vrstu *A. Heckeli*, koja se nahodi na zapadnoj obali, nije se moglo još potpuno dokazati, da zaluta do naše obale, dok je vrsta *A. sturio* za to zalutanje imala poseban privilegij, moramo zaista zaključiti, da čovjek u svom razmišljanju traži često teže putove od onih, koji vode pravoj istini. Zaključujem dakle, da zapadna obala Jadranskoga mora hrani tri vrste jesetara t. j. *A. sturio*, *A. Heckeli* i zalutalu *A. huso*, a od istočne obale poznate su do danas samo dvije vrste t. j. *A. sturio* i zalutala *A. stellatus*.

Najposlije mi valja još istaknuti, da od jesetara, što sam ih ja više puta opazio na zadarskoj ribaonici, osim jedinoga primjerka *A. stellatus* sve su pripadale vrsti *A. sturio*[1].

---

[1] Kada dovrših ovo moje izvješće, primih od vrloga mi prijatelja Brusine vijest, da su već 2—3 mjeseca, što je i on dobio „blina“ iz Skadra i da je i njegov primjerak vrste *A. sturio*. To me veoma raduje.

Digitized by Google

O zakonu recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija u tijelu imaginarnih brojeva.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 12. srpnja 1903.

Napisao dr. Stjepan Bohničić.

E. E. Kummer otkrio je zakon recipročnosti za ostatke potencija regularnoga kružnoga tijela, kojima je stepen lih prost broj. Gospodin je D. Hilbert iznio za taj zakon nov dokaz, u kom su računska pomagala Kummerova preinačena i bitno pojednostavljena[1]. Gospodinu je Hilbertu pošlo također za rukom, da s pomoću teorije relativno kvadratnih brojnih tjelesa nađe dokaz za zakon recipročnosti među kvadratnim ostacima potencija u tijelu, koje je uza sva svoja konjugirana tjelesa imaginarno, a broj idealskih razreda u njemu lih[2]. Zakon recipročnosti za kvadratne ostatke potencija u tijelu imaginarnih brojeva, koje je određeno imaginarnom jedinicom i, samo je poseban slučaj toga općenoga kvadratnoga zakona recipročnosti[3]. Hilbertovi se dokazi opiru o razdiobu idealskih razreda izvjesnih relativnih tjelesa u rodove.

Dokaz za zakon recipročnosti među bikvadratnim ostacima potencija u tijelu imaginarnih brojeva nije dosada na tom putu nađen. Pokušat ću ga izvesti u ovoj radnji. Pri tom ću se poslužiti razdiobom idealskih razreda izvjesnih relativno bikvadratnih brojnih tjelesa s obzirom na tijelo imaginarnih brojeva u rodove. Da se

[1] Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung Bd. 4.

[2] Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Mathem. Annalen Bd. 51.

[3] Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper. Mathem. Annalen Bd. 45.

Digitized by Google

pomenuti dokaz može izvesti, treba da nam je poznat Eisensteinov zakon recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija među racionalnim i imaginarnim brojem.

§ 1.

Cijeli brojevi tijela $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$.

Označit ćemo sa k tijelo imaginarnih brojeva; μ neka bude od ± 1 različit cio broj toga tijela, koji nije djeljiv nikakvim kvadratnim brojem, a $M_1 = \sqrt[4]{\mu}$ korijen jednadžbe

$$x^4 - \mu = 0.$$

Brojevi M_1 i i određuju tijelo $K_1 = k(\sqrt[4]{\mu}, i)$, koje je s obzirom na tijelo k relativno ciklično četvrtoga stepena. Njegovu relativnu grupu čine supstitucije:

$$1,\ S_1 = (M_1,\ iM),\ S_1^2,\ S_1^3.$$

Tijelo K_1 sadržava u sebi tijelo $K = k(\sqrt{\mu}, i)$, te je s obzirom na K relativno ciklično drugoga stepena, a relativna mu je grupa s obzirom na K:

$$1,\ S_1^2 = (M_1,\ -M_1).$$

Sam je K opet relativno cikličan drugoga stepena s obzirom na tijelo k, te ima s obzirom na k relativnu grupu:

$$1,\ S = (M_1^2,\ -M_1^2).$$

Cijele brojeve tijela K_1 možemo prikazati u obliku:

$$A_1 = \frac{A + BM_1}{C},$$

gdje nam A, B, C znače cijele brojeve tijela K. No budući da

$$S_1^2 A_1 = \frac{A - BM_1}{C}$$

treba da bude cio broj, moraju i brojevi

Digitized by Google

$$A_1 + S^2_1 A_1 = \frac{2A}{C}, \quad A_1 - S_1{}^2 A_1 = \frac{2BM_1}{C}$$

biti cijeli. Odatle se vidi, da svaki prosti ideal $\mathfrak{P}$ tijela K, koji nije u broju $\lambda = 1 + i$ sadržan kao faktor, a nalazi se u broju C, mora također biti sadržan u brojevima A i B kao faktor tako, te možemo brojeve A, B, C nadomjestiti drugim trima, od kojih zadnji nije više djeljiv sa $\mathfrak{P}$. Postupamo li tako i dalje, doći ćemo napokon do takva broja C u nazivniku, koji nije više djeljiv nijednim prostim idealom, koji se ne nalazi u broju λ. Vidimo dakle, da se svaki cijeli broj A_1 tijela K_1 može prikazati u obliku:

$$A_1 = \frac{A + BM_1}{\lambda^u},$$

gdje je u cio racionalan broj, koji treba još pobliže odrediti.

Poznato je, da brojevi A i B imaju ovaj oblik:

$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 M^2}{\lambda^v}, \quad B = \frac{\beta_1 + \beta_2 M^2}{\lambda^w},$$

gdje su α_1, α_2, β_1, β_2 cijeli brojevi tijela k, a v, w cijeli racionalni brojevi, koji mogu ponajviše biti jednaki 2. Nazivnici brojeva A i B u izrazu za A_1 mogu se ukloniti tim, da brojnik i nazivnik toga izraza pomnožimo prikladnom potencijom broja λ tako, da već unaprijed možemo uzeti A i B u obliku:

$$A = \alpha + \gamma M^2, \quad B = \beta + \delta M^2,$$

gdje nam α, β, γ, δ znače cijele brojeve tijela k, koji su relativno prosti prema λ.

Pita se sada, ako A_1 uzmemo u tom obliku tako, da možemo staviti:

$$A_1 = \frac{A + BM_1}{\lambda^u} = \frac{\alpha + \beta M_1 + \gamma M_1{}^2 + \delta M_1{}^3}{\lambda^u},$$

kolik može biti u?

Promislimo li, da su $A_1 + S_1{}^2 A_1$ i $A_1 - S_1{}^2 A_1$ cijeli brojevi, vidjet ćemo neposredno, da u ne može biti veći od 4. Osim netom spomenutih brojeva mora i relativna norma $N_{1,K}$ broja A_1 uzeta s obzirom na tijelo K, to će reći:

$$N_{1,K}(A_1) = \frac{A^2 - B^2 M_1{}^2}{\lambda^{2u}},$$

biti cio broj.

Digitized by Google

Da ti uvjeti budu zadovoljeni, treba, ako je $u = 1$, da bude

$$(\alpha^2 + \gamma^2\mu - 2\beta\delta\mu)^2 - (\beta^2 + \delta^2\mu - 2\alpha\gamma)^2\mu \equiv 0, \quad (\lambda^4).$$

Stavimo li:

$$\alpha^2 + \gamma^2\mu - 2\beta\delta\mu = \zeta, \quad \beta^2 + \delta^2\mu - 2\alpha\gamma = \eta,$$

to se može zadnja kongruencija napisati u obliku:

$$\zeta^2 - \eta^2\mu \equiv 0, \quad (\lambda^4).$$

U toj su kongruenciji brojevi ζ, η ili oba prosta prema λ ili oba djeljiva sa λ. U prvom je slučaju μ kvadratan ostatak s obzirom na λ^4, u drugom moraju ζ i η biti djeljivi bar sa λ^2, kako se neposredno vidi iz građe tih izraza. Ako je pak δ prost prema λ, mora biti i β; stoga zaključujemo iz kongruencije:

$$\beta^2 + \delta^2\mu \equiv 0, \quad (\lambda^2),$$

da μ mora biti kvadratan ostatak s obzirom na λ^2. U protivnom slučaju, ako je δ djeljiv sa λ, vidimo, da α i γ moraju biti prosti prema λ, odakle poradi kongruencije

$$\alpha^2 + \gamma^2\mu \equiv 0, \quad (\lambda^2)$$

zaključujemo, da μ mora biti kvadratan ostatak s obzirom na λ^2 ili, što isto znači, da mora biti

$$\mu \equiv 1, \quad (\lambda^2).$$

Uzmimo nadalje, da je $u \geq 2$. Budući da $A_1 + S_1^2 A_1$ i $A_1 - S_1^2 A_1$ treba da budu cijeli brojevi, moraju i brojevi

$$a) \qquad \frac{\alpha^2 - \gamma^2\mu}{\lambda^{2u-4}} \quad \text{i} \quad \frac{\beta^2 - \delta^2\mu}{\lambda^{2u-4}}$$

biti cijeli. No budući da i $N_{1,K}(A_1)$ treba da bude cio broj, izlaze ove kongruencije:

$$b) \qquad \zeta \equiv 0, \quad \eta \equiv 0, \quad (\lambda^{2u-2});$$

$$c) \qquad \zeta^2 - \eta^2\mu \equiv 0, \qquad (\lambda^{4u}).$$

Ovi nužni uvjeti *a)*, *b)*, *c)* očito su i dovoljni, da A_1 bude cio broj.

Digitized by Google

Točnije istraživanje veličine broja u u posebnim slučajevima nije od potrebe za cilj, za kojim u ovoj radnji idemo.

§ 2.

Relativna diskriminanta tijela K_1 s obzirom na tijelo k.

Označimo li diferente tjelesa k, K, K_1 sa $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, relativne diferente tjelesa K_1 i K s obzirom na tijelo k sa $\mathfrak{D}_{1,k}$, $\mathfrak{D}_k$ i napokon relativnu diferentu tijela K_1 s obzirom na K sa $\mathfrak{D}_{1,K}$, to postoje ove ovisnosti:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_k \mathfrak{d},$$
$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_{1,k} \mathfrak{d},$$
$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_{1,K} \mathfrak{D}.$$

Iz zadnje dvije jednadžbe izlazi:

$$\mathfrak{D}_{1,k} \mathfrak{d} = \mathfrak{D}_{1,K} \mathfrak{D},$$

a odatle, ako se za $\mathfrak{D}$ stavi vrijednost iz prve:

$$\mathfrak{D}_{1,k} = \mathfrak{D}_{1,K} \mathfrak{D}_k;$$

$\mathfrak{D}_{1,k}$ i $\mathfrak{D}_{1,K}$ jesu ideali tijela K_1, $\mathfrak{D}_k$ ideal tijela K.

Po poznatom je zakonu relativna diskriminanta makar kojega tijela s obzirom na koje njemu podređeno tijelo[1] jednaka relativnoj normi njegove relativne diferente s obzirom na to podređeno tijelo. Stoga izlazi iz zadnje jednadžbe:

$$D_{1,k} = N_{1,k}(\mathfrak{D}_{1,K})\, \mathfrak{D}^2_k;$$

u toj nam je jednadžbi $D_{1,k}$ relativna diskriminanta tijela K_1 s obzirom na tijelo k; D_k relativna diskriminanta tijela K s obzirom na k; $N_{1,k}$ norma uzeta u tijelu K_1 s obzirom na k.

No imamo dalje:

$$N_{1,k}(\mathfrak{D}_{1,K}) = \mathfrak{D}_{1,K} \cdot S_1 \mathfrak{D}_{1,K} \cdot S_1(\mathfrak{D}_{1,K} \cdot S_1 \mathfrak{D}_{1,K}) =$$
$$= D_{1,K} \cdot S_1 D_{1,K} = N_k(D_{1,K});$$

[1] Unterkörper.

Digitized by Google

pri tom se ima pod $D_{1,K}$ razumijevati relativna diskriminanta tijela K_1 s obzirom na K, a pod N_k norma uzeta u tijelu K s obzirom na k. Stavimo li vrijednost nađenu za $N_{1,k}(\mathfrak{D}_{1,K})$ u predzadnju jednadžbu, dobit ćemo za relativnu diskriminantu tijela K_1 s obzirom na tijelo k ovu jednadžbu:

$$D_{1,k} = N_k(D_{1,K})\, D^2_k.$$

Ta jednadžba izražava poučak:

Relativna diskriminanta tijela K_1 s obzirom na tijelo k sadržava samo takove proste ideale kao faktore, koji su ili u relativnoj diskriminanti tijela K_1 s obzirom na K, ili u relativnoj diskriminanti tijela K s obzirom na k sadržani kao faktori.

Da se dakle odrede prosti ideali, koji su u $D_{1,k}$ sadržani kao faktori, treba samo odrediti one, koji su sadržani u D_k i $D_{1,K}$ kao faktori.

Među prostim brojevima π tijela k, koji su različiti od λ, sadržani su poradi pretpostavke učinjene u početku o broju μ u D_k samo oni prosti brojevi, koji se nalaze u μ. Takav se prost broj π raspada u tijelu K na dva jednaka prosta ideala $\mathfrak{P}$ prema jednadžbi:

$$\pi = \mathfrak{P}^2 = (\pi, \sqrt{\mu})^2.$$

$N_k(D_{1,K})$ sadržava također samo takove od λ različite proste brojeve kao faktore, koji se nalaze u broju μ, jer $D_{1,K}$ sadržava kao faktore između prostih ideala $\mathfrak{P}$ tijela K, koji se ne nalaze u λ, samo one, koji se nalaze u $\sqrt{\mu}$. Za proste ideale te vrste postoji jednadžba:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^2 = (\mathfrak{P}, \sqrt[4]{\mu})^2,$$

gdje $\mathfrak{P}_1$ znači prost ideal u K_1.

Vidimo dakle, da $D_{1,k}$ sadržava samo takove od λ različite proste brojeve tijela k kao faktore, koji su sadržani i u broju μ.

Prosti se ideal $\mathfrak{P}$ ne mijenja, ako se podvrgne supstituciji $S = (\sqrt{\mu}, -\sqrt{\mu})$; isto se tako ne mijenja $\mathfrak{P}_1$, ako ga podvrgnemo supstituciji $S_1^2 = (\sqrt[4]{\mu}, -\sqrt[4]{\mu})$. Poradi te osobitosti zvat ćemo $\mathfrak{P}$ dvoličnim prostim idealom u tijelu K s obzirom na tijelo k, a $\mathfrak{P}_1$ dvoličnim prostim idealom u tijelu K_1 s obzirom na tijelo K. No $\mathfrak{P}_1$ ne mijenja se ni onda, ako ga podvrgnemo supstituciji

Digitized by Google

$S_1 = (\sqrt[4]{\mu},\ i\sqrt[4]{\mu})$. Stoga ćemo $\mathfrak{P}_1$ zvati također dvoličnim prostim idealom u tijelu K_1 s obzirom na tijelo k.

Ako je prosti ideal $\mathfrak{P}_1$ tijela K_1, koji nije u λ sadržan kao faktor, dvoličan s obzirom na K, to je on također dvoličan s obzirom na k. Drukčije je to kod prostih ideala, koji su u λ sadržani kao faktori.

Ako se λ nalazi u broju μ, naći ćemo, ako postupamo isto onako, kako smo postupali kod ideala, koji nijesu sadržani u λ kao faktori, da je λ i u D_k i u $N_k(D_{1,K})$ sadržan kao faktor. Označimo li sa $\mathfrak{L}$ prosti ideal tijela K, koji je u λ sadržan kao faktor, a sa $\mathfrak{L}_1$ prosti ideal tijela K_1, koji je u $\mathfrak{L}$ sadržan kao faktor, to postoje snošaji:

$$\lambda = \mathfrak{L}^2 = (\lambda, \sqrt{\mu})^2,\quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1{}^2 = (L, \sqrt[4]{\mu})^2,\quad \lambda = \mathfrak{L}_1{}^4.$$

U tom slučaju nije $\mathfrak{L}_1$ samo dvoličan s obzirom na tijelo K, nego i s obzirom na k.

Neka sada bude μ prost prema λ, to je i D_k onda i samo onda prost prema λ, ako je

$$\mu \equiv \pm 1,\quad (\lambda^4).$$

No može biti, da je D_k doduše prost prema λ, ali da je $D_{1,k}$ ipak djeljiv sa λ. U istinu, ako se opet sa $\mathfrak{l}$ označi prosti ideal, štono je sadržan u λ kao faktor, nužno je, a i dovoljno, da $D_{1,K}$ bude prost prema λ, da postoji kongruencija:

$$(1) \qquad \sqrt{\mu} \equiv A^2,\quad (\mathfrak{l}^4),$$

u kojoj je A cio broj tijela K.

Lako se možemo uvjeriti, da je taj uvjet zadovoljen, ako je:

$$\mu \equiv 1,\ -3,\ 1+4i,\quad (\lambda^6).$$

Postoje naime ove kongruencije:

ako je $\mu \equiv 1$, (λ^6), $\quad \sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{1+i\sqrt{\mu}}{\lambda}\right)^2$, (λ^4);

„ „ $\mu \equiv 1+4i$, (λ^6), $\quad \sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\mu - i\sqrt{\mu}}{\lambda}\right)^2$, (λ^4);

„ „ $\mu \equiv -3$, (λ^6), $\quad \sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{1-i\sqrt{\mu}}{\lambda}\right)^2$, (λ^4).

Digitized by Google

Ti su slučajevi također jedini, u kojima je $D_{1,k}$ prost prema λ, ako μ nije djeljiv sa λ. Da se o tom uvjerimo, proći ćemo redom još moguće slučajeve.

Uzmimo ponajprije, da je

$$\mu \equiv -3 + 4i, \quad (\lambda^6).$$

U tom slučaju nalazimo poradi toga, što je

$$N_{1,k}\left(\frac{1+M_1}{\lambda}\right) = \frac{1-\mu}{\lambda^4} \equiv i\lambda, \quad (\lambda^6),$$

za λ rastvor:

$$\lambda = \left(\lambda, \frac{1+M_1}{\lambda}\right)\left(\lambda, \frac{1+iM_1}{\lambda}\right)\left(\lambda, \frac{1-M_1}{\lambda}\right)\left(\lambda, \frac{1-iM_1}{\lambda}\right).$$

Prosti ideal $\mathfrak{L} = \left(\lambda, \frac{1-M_1^2}{\lambda^4}\right)$ tijela K nije dvoličan s obzirom na k, no raspada se u K_1 na dva jednaka prosta ideala

$$\mathfrak{L}_1 = \left(\lambda, \frac{1+M_1}{\lambda}\right) = \left(\lambda, \frac{1-M_1}{\lambda}\right)$$

tako, da postoji jednadžba

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1^2.$$

Isto vrijedi za ideal $S\mathfrak{L}$ konjugiran sa $\mathfrak{L}$. Za nj valja jednadžba

$$S\mathfrak{L} = (S_1\mathfrak{L}_1)^2.$$

$\mathfrak{L}_1$ i $S_1\mathfrak{L}_1$ jesu dvolični prosti ideali s obzirom na K, pa su stoga i $\mathfrak{L}$ i $S\mathfrak{L}$ sadržani kao faktori u $D_{1,K}$ ili λ u $D_{1,k}$.

Ako je nadalje

$$\mu \equiv -1, \text{ ili } \equiv 3 + 4i, \quad (\lambda^6),$$

to je $\lambda = \mathfrak{L} \cdot S\mathfrak{L}$, ako pod $\mathfrak{L}$ razumijemo prost ideal tijela K. $\mathfrak{L}$ niti se može u K_1 raspasti na dva različita prosta ideala, niti može ostati nerastvoren. Da se može dogoditi prvo ili drugo, mora poradi toga, što je u naša dva slučaja svaki cijeli broj tijela K kongruentan izvjesnomu cijelom broju tijela k za svaku potenciju ideala $\mathfrak{L}$, s obzirom na jednadžbu (1) biti

$$\mu \equiv +1, \quad (\lambda^4).$$

Digitized by Google

Napokon još može biti

$$\mu \equiv -1 + 4i, \quad (\lambda^5).$$

U tom slučaju ostaje λ u tijelu K nerastvoren: $\lambda = \mathfrak{L}$. Prosti ideal $\mathfrak{L}$ ne može i u tijelu K_1 ostati nerastvoren poradi kongruencije

$$1 - \mu \equiv 0, \quad (\lambda^2), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^3).$$

No ne može se ni raspasti na dva različita prosta ideala, jer bi u tom slučaju moralo biti:

$$\sqrt{\mu} \equiv A^2, \quad (\mathfrak{L}^5),$$

gdje A znači cio broj u K; odatle bi dalje izlazilo

$$-\sqrt{\mu} \equiv (SA)^2, \quad (\mathfrak{L}^5),$$

a oboje bi dalo

$$\mu \equiv \left(iN_k(A)\right)^2, \quad (\lambda^5),$$

no to ne može biti.

Resultat ovoga paragrafa izreći ćemo ukratko ovako:

Relativna diskriminanta $D_{1,k}$ sadržava kao faktore sve one proste brojeve tijela k, koji su u μ sadržani kao faktori. Samo prosti broj λ može biti sadržan kao faktor u $D_{1,k}$, ako ga i nema u broju μ. Taj prosti broj nije samo onda u diskriminanti $D_{1,k}$ sadržan kao faktor, ako je $\mu \equiv 1$, (λ^4), ali ne u isti mah $\equiv 1$, (λ^5), $\not\equiv 1$, (λ^6).

§ 3.

Rastvaranje prostih brojeva tijela k u tjelesima K i K_1.

Iztražit ćemo ponajprije proste brojeve π tijela k, koji su različiti od λ.

Svaki se takav prosti broj raspada u tijelu K na dva različita ili na dva jednaka prosta ideala ili ostaje nerastvoren prema tomu, da li je

$$\left(\frac{\mu}{\pi}\right) = 1, \ 0 \text{ ili } -1.$$

Prosti ideal $\mathfrak{P}$ tijela K sadržan u π kao faktor raspada se u

Digitized by Google

tijelu K_1 na dva različita ili na dva jednaka prosta ideala ili ostaje nerastvoren prema tomu, da li je

$$\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{P}}\right) = 1, \quad 0 \quad \text{ili} \quad -1.$$

Neka bude ponajprije $\left(\frac{\mu}{\pi}\right) = 1$, to se raspada π u tijelu K prema jednadžbi

$$\pi = \mathfrak{P} \,.\, S\mathfrak{P},$$

gdje su $\mathfrak{P}$ i $S\mathfrak{P}$ dva različita prosta ideala tijela K. Treba li, da se i $\mathfrak{P}$, a prema tomu i $S\mathfrak{P}$, u tijelu K_1 dalje rastvori, mora biti $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{P}}\right) = 1$ ili, što na isto izlazi, treba da postoji kongruencija

$$\sqrt{\mu} \equiv A^2, \quad (\mathfrak{P}),$$

u kojoj A prikazuje cio broj tijela K. Poradi toga, što je $N(\mathfrak{P}) = n(\pi)$, ako se pod N i n razumijevaju norme uzete u tjelesima K i k, mora biti svaki cijeli broj A tijela K kongruentan izvjesnomu broju α tijela k tako, da se zadnja kongruencija može i ovako napisati:

$$\sqrt{\mu} \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{P}).$$

Podvrgnemo li sada tu kongruenciju supstituciji S, dobit ćemo

$$-\sqrt{\mu} \equiv \alpha^2, \quad (S\mathfrak{P}),$$

a iz obiju izlazi

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (\pi)$$

ili

$$\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = 1,$$

ako sa $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\}$ označimo bikvadratni karakter ostatka broja μ s obzirom na broj π. Taj je uvjet nuždan i dovoljan, da se $\mathfrak{P}$ u tijelu K_1 raspadne na dva različita prosta ideala $\mathfrak{P}_1$ i $S_1\mathfrak{P}_1$.

Nadalje se dade zamisliti, da je $\left(\frac{\mu}{\pi}\right) = 1$, a $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{P}}\right) = -1$, ili da postoji snošaj:

$$\mu \equiv \alpha^2, \quad \not\equiv \beta^4, \quad (\pi);$$

Digitized by Google

α i β su cijeli brojevi u tijelu k. U tom slučaju ostaje $\mathfrak{P}$, a i $S\mathfrak{P}$, u K_1 nerastvoren.

Ako je $\left(\frac{\mu}{\pi}\right) = -1$, to je $\pi = \mathfrak{P}$, a to znači, da π ostaje u tijelu K nerastvoren. Tada može $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{P}}\right)$ samo biti jednak -1, jer bi iz jednadžbe $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{P}}\right) = +1$ izlazila jednadžba $\left(\frac{\mu}{\pi}\right) = +1$. Stoga ostaje $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ i u tijelu K_1 nerastvoren.

Napokon je moguće, da bude $\left(\frac{\mu}{\pi}\right) = 0$, odakle izlazi, da je $\pi = \mathfrak{P}^2$. Tada sigurno mora biti i $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{P}}\right) = 0$, a stoga $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1{}^2$. $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{P}_1$ jesu prosti ideali u K i K_1.

Resultat toga istraživanja napisat ćemo pregledno ovako:

ako je $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = 1$, mora biti $\pi = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_1''\mathfrak{P}_1'''$,
$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1''\mathfrak{P}_1'''$;

„ „ $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = -1$, „ „ $\pi = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1'$;

„ „ $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = \pm i$, „ „ $\pi = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$;

„ „ $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = 0$, „ „ $\pi = \mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}_1{}^4$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1{}^2$.

Crticama označih konjugirane ideale, a indeksom ideale tijela K_1.

Iz toga se pregleda razabira ovaj zakon:

Svaki se prosti broj π tijela k, koji je različit od λ, raspada u tijelu K_1 na četiri različita, ili na četiri jednaka, ili samo na dva različita prosta ideala, ili ostaje u K_1 nerastvoren prema tomu, da li je

$$\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = 1,\ 0,\ -1 \text{ ili } \pm i.$$

Da nađemo, kako se rastvara λ u tjelesima K i K_1, treba se samo poslužiti onim, što je rečeno u § 2., a uz to još istražiti slučajeve $\mu \equiv 1$, (λ^6) i $\mu \equiv 1 + 4i$, (λ^5).

Ako je $\mu \equiv 1$, (λ^6), raspadaju se prosti ideali $\mathfrak{L}$ i $S\mathfrak{L}$ tijela K sadržani kao faktori u λ sigurno svaki na dva različita prosta ideala tijela K_1, jer je tada zadovoljena kongruencija

$$\sqrt{\mu} \equiv 1, \quad (\mathfrak{L}^5).$$

Digitized by Google

U slučaju, da je $\mu \equiv 1 + 4i$, (λ^5), ostaje λ u tijelu K nerastvoren: $\lambda = \mathfrak{L}$, ali ni $\mathfrak{L}$ se ne raspada više u tijelu K_1, jer kad bi se raspadao, morala bi postojati kongruencija

$$\sqrt{\mu} \equiv A^2, \quad (\mathfrak{L}^5),$$

u kojoj je A cio broj tijela K. No odatle bi izlazilo, da mora biti $\mu \equiv \alpha^2$, (λ^5), a to u našem slučaju nije; α je cio broj tijela k.

Resultat istraživanja o prostom broju λ u predašnjem i ovom paragrafu možemo sastaviti ujedno ovako:

ako je $\mu \equiv 1$, (λ^6), mora biti $\lambda = \mathfrak{L}\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1'\mathfrak{L}_1''\mathfrak{L}_1'''$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_1'$, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1''\mathfrak{L}_1'''$;

„ „ $\mu \equiv \pm 1$, (λ^5), $\not\equiv 1$, (λ^6), mora biti $\lambda = \mathfrak{L}\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1^2\mathfrak{L}_1'^2$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1^2$, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1'^2$;

„ „ $\mu \equiv 1 + 4i$, (λ^5), mora biti $\lambda = \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1$;

„ „ $\mu \equiv -1 + 4i$, (λ^5), „ „ $\lambda = \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1^2$;

u svakom je drugom slučaju $\lambda = \mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}_1^4$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1^2$.

Crticama i ovdje označih konjugirane ideale, a indeksom ideale tijela K_1.

§ 4.

Normni ostaci i neostaci tijela K_1.

Neka bude $\mathfrak{k}$ makar koje brojno tijelo, a $\mathfrak{K}$ njemu nadređeno tijelo[1]. Ako je tada makar koji cijeli broj ν tijela $\mathfrak{k}$ s obzirom na svaku cijelu racionalnu potenciju $\mathfrak{p}^e$ prostoga ideala $\mathfrak{p}$ tijela $\mathfrak{k}$ kongruentan relativnoj normi kojega cijeloga broja A tijela $\mathfrak{K}$ uzetoj u tijelu $\mathfrak{K}$ s obzirom na $\mathfrak{k}$, zvat ćemo ν normnim ostatkom tijela $\mathfrak{K}$ s obzirom na prosti ideal $\mathfrak{p}$; inače ćemo zvati ν normnim neostatkom tijela $\mathfrak{K}$ s obzirom na $\mathfrak{p}$.

Promatrat ćemo već u ovom paragrafu tri vrste takovih normnih ostataka i neostataka, a to su normni ostaci i neostaci tijela K_1 s obzirom na proste ideale tjelesa k i K, pa onda normni ostaci i neostaci tijela K s obzirom na proste ideale tijela k. Normne ostatke i neostatke prve vrste zvat ćemo također **bikvadratnim** normnim ostacima i neostacima, a normne ostatke i neostatke **druge** i treće vrste **kvadratnim** normnim ostacima i neostacima **s obzirom** na izvjestan prost ideal.

---

[1] Oberkörper.

Digitized by Google

Pokazat ćemo ponajprije, da broj ν tijela k može onda i samo onda biti bikvadratnim normnim ostatkom s obzirom na koji prosti broj π tijela k, koji se razlikuje od λ, a sadržan je u broju μ kao faktor, ako je

$$\left\{\frac{\nu}{\pi}\right\} = 1.$$

Ako ta jednadžba postoji, sigurno je ν bikvadratan normni ostatak s obzirom na π, jer tada mora da postoji kongruencija oblika

$$\nu \equiv \alpha^4, \quad (\pi),$$

gdje je α cio broj u tijelu k, a isto se takova kongruencija može naći i za svaku višu pozitivnu cijelu racionalnu potenciju π^e broja π. Iz zadnje kongruencije izlazi naime neposredno ova:

$$\frac{\nu}{\alpha^4} \equiv 1 + 4\omega, \quad (\pi^3),$$

u kojoj je ω broj tijela k djeljiv brojem π. Obazremo li se sada na to, da je

$$N_{1,k}(1+\omega) \equiv 1 + 4\omega, \quad (\pi^3),$$

to je jasno, da nam je tvrdnja ispravna, jer se isti postupak može nastaviti tako, da konačno za svaku potenciju π^e vrijedi kongruencija oblika

$$\nu \equiv \beta^4, \quad (\pi^e),$$

u kojoj je β cio broj tijela k.

No i obrnuto možemo zaključiti, da ν mora biti bikvadratan ostatak broja π, ako je on bikvadratan normni ostatak s obzirom na broj π. Uzmemo li doista, da je ν bikvadratan normni ostatak s obzirom na π, to mora za svaku pozitivnu cijelu racionalnu potenciju π^e broja π postojati kongruencija oblika:

$$\nu \equiv N_{1,k}(A_1), \quad (\pi^e),$$

gdje je A_1 cio broj tijela K_1. No budući da je π u tijelu K_1 jednak četvrtoj potenciji prostoga ideala $\mathfrak{P}_1$, svaki je cijeli broj A_1 tijela K_1 s obzirom na $\mathfrak{P}_1$ kongruentan izvjesnomu cijelom broju α tijela k. Stoga izlazi iz zadnje kongruencije, da mora također biti

$$\nu \equiv \alpha^4, \quad (\pi),$$

a tim je prvi poučak dokazan.

Digitized by Google

Uzmimo sada, da se prosti broj π, koji se razlikuje od λ, ne nalazi ni u broju μ ni u broju ν. Onda možemo dokazati, da je svaki takav cijeli broj ν tijela k bikvadratan normni ostatak s obzirom na prosti broj π.

Poznato je, da je pod učinjenom pretpostavkom svaki cijeli broj ν tijela k kvadratan normni ostatak tijela K s obzirom na π. Stoga postoji za svaku pozitivnu cijelu racionalnu potenciju π^e kongruencija:

$$\nu \equiv N_k(A), \quad (\pi^e),$$

gdjeno je A cio broj tijela K. Ako je pak $\mathfrak{P}$ prost ideal tijela K sadržan u broju π, mora i A biti kvadratan normni ostatak tijela K_1 s obzirom na prosti ideal $\mathfrak{P}$. Stoga se može i za svaku potenciju $\mathfrak{P}^e$ naći kongruencija oblika:

$$A \equiv N_{1,K}(A_1), \quad (\mathfrak{P}^e),$$

u kojoj je A_1 cio broj tijela K_1. Zadnje dvije kongruencije daju:

$$\nu \equiv N_k[N_{1,K}(A_1)], \quad (\mathfrak{P}^e),$$

a budući da je $N_k[N_{1,K}(A_1)]$ cio broj tijela k, također:

$$\nu \equiv N_k[N_{1,K}(A_1)], \quad (\pi^e);$$

a tim je i drugi poučak dokazan.

Treći slučaj neka bude ovaj. Prosti broj π tijela k, koji se razlikuje od broja λ, ne nalazi se u broju μ, ali se nalazi u broju ν, i to baš u prvoj potenciji. Možemo pokazati, da je u tom slučaju ν samo onda bikvadratan normni ostatak tijela $k(\sqrt{\mu}, i)$ s obzirom na π, ako je

$$\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = 1.$$

Ako je ν bikvadratan normni ostatak s obzirom na π, postoji sigurno kongruencija:

$$\nu \equiv N_{1,k}(A_1), \quad (\pi^2),$$

u kojoj je A_1 cio broj tijela K_1. Budući da je ν djeljiv točno prvom potencijom broja π, može i A_1 biti djeljiv samo prvom

Digitized by Google

potencijom prostoga ideala $\mathfrak{P}_1$ tijela K_1, koji je u π sadržan kao faktor; stoga se π u K_1 raspada prema jednadžbi:

$$\pi = (\pi, A_1)\,(\pi, S_1 A_1)\,(\pi, S_1^2 A_1)\,(\pi, S_1^3 A_1).$$

π se dakle raspada u tijelu K_1 na četiri različna prosta ideala, jer smo uzeli, da je $\mu \not\equiv 0$, (π). No to može samo onda biti, ako je μ bikvadratan ostatak broja π.

Tim je dokazano, da μ sigurno mora biti bikvadratan ostatak broja π, ako ν treba da bude bikvadratan normni ostatak s obzirom na π. Ali valja i obrnuto. U istinu, ako je $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\} = 1$, raspada se π u K_1 na četiri različita prosta ideala. Jedan takav ideal neka je $\mathfrak{P}_1$, a cijeli broj A_1 tijela K_1 neka bude točno djeljiv prvom potencijom toga ideala $\mathfrak{P}_1$. Tada je norma $N_{1,k}$ broja A_1 djeljiva točno brojem π. Označit ćemo tu normu sa $\alpha = N_{1,k}(A_1)$ i odrediti cijeli broj ρ tako, da bude djeljiv sa $\frac{\alpha}{\pi}$, ali prost prema broju π. Onda je $\frac{\nu\rho^3}{\alpha}$ cio broj prost prema π. Takav je broj po drugom malo prije dokazanom poučku bikvadratan normni ostatak tijela K_1 s obzirom na π. Stoga možemo staviti:

$$\frac{\nu\rho^3}{\alpha} \equiv N_{1,k}(B_1), \quad (\pi^e)$$

za koji mu drago cijeli racionalni eksponent e, ako pod B_1 razumijevamo cio broj tijela K_1. Uzeli smo, da je ρ prost prema broju π, pa možemo stoga odrediti cijeli broj ρ_1, koji zadovoljava kongruenciju $\rho\rho_1 \equiv 1$, (π^e). Tada je i ρ_1 prost prema broju π i stoga bikvadratan normni ostatak tijela $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$ s obzirom na π tako, te možemo staviti

$$\rho_1 \equiv N_{1,k}(C_1), \quad (\pi^e),$$

gdje nam je C_1 cio broj tijela K_1. Prema tomu mora ν uvijek da zadovolji kongruenciju oblika

$$\nu \equiv N_{1,k}(A_1 B_1 C_1^2), \quad (\pi^e),$$

a tim je treći poučak dokazan.

Digitized by Google

Još ćemo dokazati ovaj poučak: Ako su ν i ν_1 dva cijela broja u tijelu k, a njihov kvocijent $\frac{\nu}{\nu_1}$ jednak relativnoj normi $N_{1,k}$ kojega cijeloga ili slomljenoga broja A_1 u K_1, to su ti brojevi ν i ν_1, ako je π prost od λ različan u μ kao faktor sadržan broj, ili zajedno bikvadratni normni ostaci ili zajedno normni neostaci.

Prosti je broj π u tijelu K_1 jednak četvrtoj potenciji izvjesnoga prostoga ideala $\mathfrak{P}_1$.

Ako stavimo $\gamma = N_{1,k}(\Gamma_1)$, gdje Γ_1 ima biti cio broj u tijelu K_1, jasno je, da je $\gamma\nu$ sigurno bikvadratan normni ostatak, ako je ν takav. Stoga treba samo još dokazati, da je i obrnuto, ako je $\gamma\nu$ bikvadratan normni ostatak, broj ν bikvadratan normni ostatak.

Neka bude π u ν sadržan u a-toj, a u γ u b-toj potenciji. Kolikogod velik bio e, uvijek treba da postoji kongruencija oblika

$$\gamma\nu \equiv N_{1,k}(\Omega_1), \quad (\pi^{b+e}),$$

u kojoj je Ω_1 cio broj tijela K_1. Uzet ćemo, da je u toj kongruenciji e veći od a.

Budući da je $\pi = \mathfrak{P}_1^4$, sadržan je prosti ideal $\mathfrak{P}_1$ tijela K_1 u Γ_1 točno u b-toj, a u Ω_1 u $(a+b)$-toj potenciji. Sada neka bude $\varkappa$ cio sa $\frac{\gamma}{\pi^b}$ djeljiv, a prema π prost broj tijela k; onda je $A_1 = \frac{\varkappa\Omega_1}{\Gamma_1}$ cio broj u K_1, a iz gornje kongruencije izlazi

$$\varkappa^4\nu \equiv N_{1,k}(A_1), \quad (\pi^e).$$

No budući da smo uzeli, da je $\varkappa$ prost prema π, može se odrediti cijeli broj $\varkappa_1$ tako, da bude zadovoljena kongruencija $\varkappa\varkappa_1 \equiv 1$, (π^e). Stoga izlazi iz zadnje kongruencije

$$\nu \equiv N_{1,k}(\varkappa_1 A_1), \quad (\pi^e);$$

ν je dakle bikvadratan normni ostatak s obzirom na π.

Sada ćemo lako dokazati postavljenu tvrdnju. Ako je $\frac{\nu}{\nu_1}$ jednak normi $N_{1,k}$ kojega cijeloga ili slomljenoga broja u tijelu K_1, to možemo staviti $\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$, gdje nam γ i γ_1 predočuju norme $N_{1,k}$ cijelih brojeva u K_1. Napišemo li tu jednadžbu u obliku $\nu\gamma = \nu_1\gamma_1$,

Digitized by Google

to se, budući da ν i $\nu\gamma$, a isto tako i ν_1 i $\nu_1\gamma_1$, moraju biti ili zajedno bikvadratni normni ostaci ili normni neostaci, neposredno vidi, da to i za brojeve ν i ν_1 vrijedi.

Napokon ćemo uzeti, da su μ i ν cijeli brojevi tijela k, a μ da nije djeljiv nikakvim kvadratom cijeloga broja, pa da je π prost broj tijela k različan od λ, koji je u svakom od brojeva μ i ν sadržan točno u prvoj potenciji. Tada možemo staviti $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\rho}{\sigma}$ tako, da budu ρ i σ cijeli prema π prosti brojevi u k. Iz te jednadžbe izlazi

$$\frac{\nu}{-\rho\sigma^3} = -\frac{\mu}{\sigma^4},$$

a iz nje poradi toga, što je

$$-\frac{\mu}{\sigma^4} = N_{1,k}\left(\frac{\sqrt[4]{\mu}}{\sigma}\right),$$

zaključujemo, da ν i $-\rho\sigma^3$ moraju zajedno biti ili bikvadratni normni ostaci ili neostaci.

Za posebne brojeve μ i ν, što smo ih u ovom paragrafu promatrali, definirat ćemo osobit simbol na ovaj način. Neka bude π prost od λ različan broj u k, koji je sadržan u μ točno u a-toj, u ν točno u b-toj potenciji. Stavimo li $\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\rho}{\sigma}$ tako, da budu ρ i σ cijeli prema π prosti brojevi, neka bude naviješteni simbol $\left\{\frac{\nu, \mu}{\pi}\right\}$ definiran jednadžbom:

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\pi}\right\} = \left\{\frac{(-1)^{ab}\rho\sigma^3}{\pi}\right\}.$$

Lako se možemo uvjeriti, da je u svim slučajevima, što smo ih promatrali u ovom paragrafu, ν onda i samo onda bikvadratan normni ostatak tijela $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$ s obzirom na π, ako je

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\pi}\right\} = 1.$$

Raširenje vrijednosti toga simbola za ostale moguće slučajeve nije za našu svrhu potrebno. Isto ćemo se tako poslužiti u ovoj

Digitized by Google

radnji samo dvjema snošajima, koji vrijede za uvedeni simbol. Ako su naime ε_1 i ε_2 dvije potencije broja i, a $\varepsilon_2 \neq +1$, to postoje jednadžbe:

$$\left\{\frac{\varepsilon_1\nu,\ \mu}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\varepsilon_1,\ \mu}{\pi}\right\}\left\{\frac{\nu,\ \mu}{\pi}\right\},$$

$$\left\{\frac{\nu,\ \varepsilon_2\mu}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\nu,\ \varepsilon_2}{\pi}\right\}\left\{\frac{\nu,\ \mu}{\pi}\right\}.$$

Da su te jednadžbe istinite, izlazi iz same definicije simbola.

Prelazimo k istraživanju bikvadratnih normnih ostataka s obzirom na prosti broj $\lambda = 1+i$.

Dokazat ćemo ponajprije ovaj poučak:

Cijeli je broj α tijela k, ako je α i $\mu \not\equiv 0$, (λ), onda i samo onda bikvadratan normni ostatak tijela $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$ s obzirom na λ, ako je s obzirom na λ^6 kongruentan normi $N_{1,k}$ kojega cijeloga broja A_1 tijela K_1.

Uzmimo, da postoji kongruencija oblika

$$\alpha \equiv N_{1,k}(A_1), \quad (\lambda^6),$$

onda je dvoje moguće: ona vrijedi samo s obzirom na λ^6 ili još i s obzirom na λ^7.

U prvom slučaju valja nam promatrati broj $B_1 = (1+\lambda M_1)^2 A_1$. Za normu $N_{1,k}(B_1)$ toga broja vrijedi jednadžba:

$$N_{1,k}(B_1) = (1+4\mu)^2 N_{1,k}(A_1) = N_{1,k}(A_1) + \lambda^6\rho,$$

gdje je $\rho \not\equiv 0$, (λ). No po pretpostavci je

$$\alpha - N_{1,k}(A_1) \equiv 0, \quad (\lambda^6), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^7),$$

stoga poradi jednadžbe

$$\alpha - N_{1,k}(B_1) = \alpha - N_{1,k}(A_1) - \lambda^6\rho,$$

zaključujemo, da je

$$\alpha \equiv N_{1,k}(B_1), \quad (\lambda^7).$$

Vidimo dakle, da je α, kako je s obzirom na λ^6 kongruentan relativnoj normi $N_{1,k}$ kojega cijeloga broja B_1 tijela K_1, već i

Digitized by Google

s obzirom na λ^7 kongruentan takovoj normi. Stoga nam ostaje samo još, da dokažemo, da iz kongruencije oblika

$$\alpha \equiv N_{1,k}(A_1), \quad (\lambda^e), \quad e \geqq 7$$

već i analogna kongruencija za svaku potenciju broja λ izlazi. Iz te kongruencije zaključujemo, ako ona više ne vrijedi za λ^{e+1}, da postoji i ova:

$$\overset{\alpha}{N_{1,k}(A_1)} \equiv 1 + \lambda^e, \quad (\lambda^{e+1}).$$

No budući da je $e \geqq 7$, mora biti uvijek

$$1 + \lambda^e \equiv (1 - \lambda^{e-4})^4, \quad (\lambda^{e+1})$$

tako, da je

$$\alpha \equiv N_{1,k}[(1 - \lambda^{e-4})A_1], \quad (\lambda^{e+1}).$$

Postupamo li ovako dalje, uvjerit ćemo se općeno o ispravnosti naše tvrdnje.

Stoga nam valja samo odrediti ostatke, što ih daju norme $N_{1,k}$ cijelih brojeva α tijela K_1 s obzirom na λ^6 ili na λ^7. Sva se 64 ostatka s obzirom na λ^7, koji nijesu djeljivi sa λ, mogu predočiti u obliku:

$$i^a (3 + 2i)^b (1 + 4i)^c,$$

gdje a, b, c mogu imati vrijednosti $0, 1, 2, 3$. Uvest ćemo pokratu

$$i^a (3 + 2i)^b (1 + 4i)^c = (a, b, c)$$

tako, da za svaki cijeli broj α tijela k postoji kongruencija

$$\alpha \equiv (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha), \quad (\lambda^7).$$

Da se lakše uzmogne shvatiti ono, što dolazi, napisat ćemo sva ta 64 ostatka s obzirom na λ^7 pregledno razdijelivši ih u 16 grupa ovako:

1. grupa.	2. grupa.	3. grupa.
$i \equiv (1,0,0)$	$-i \equiv (3,0,0)$	$3i \equiv (3,2,3)$
$4+i \equiv (1,0,3)$	$4-i \equiv (3,0,1)$	$4+3i \equiv (3,2,0)$
$-4+i \equiv (1,0,1)$	$-4-i \equiv (3,0,3)$	$-4+3i \equiv (3,2,2)$
$8+i \equiv (1,0,2)$	$8-i \equiv (3,0,2)$	$8+3i \equiv (3,2,1)$

Digitized by Google

4. grupa.

$-3i \equiv (1,2,3)$
$4-3i \equiv (1,2,2)$
$-4-3i \equiv (1,2,0)$
$8-3i \equiv (1,2,1)$

5. grupa.

$2+i \equiv (3,3,3)$
$6+i \equiv (3,3,0)$
$-2+i \equiv (3,3,2)$
$-6+i \equiv (3,3,1)$

6. grupa.

$2+3i \equiv (1,1,3)$
$6+3i \equiv (1,1,2)$
$-2+3i \equiv (1,1,0)$
$-6+3i \equiv (1,1,1)$

7. grupa.

$-2-i \equiv (1,3,3)$
$2-i \equiv (1,3,2)$
$-6-i \equiv (1,3,0)$
$6-i \equiv (1,3,1)$

8. grupa.

$-2-3i \equiv (3,1,3)$
$2-3i \equiv (3,1,0)$
$-6-3i \equiv (3,1,2)$
$6-3i \equiv (3,1,1)$

9. grupa.

$1+2i \equiv (2,3,2)$
$1-2i \equiv (2,3,3)$
$1+6i \equiv (2,3,1)$
$1-6i \equiv (2,3,0)$

10. grupa.

$3+2i \equiv (0,1,0)$
$3-2i \equiv (0,1,3)$
$3+6i \equiv (0,1,1)$
$3-6i \equiv (0,1,2)$

11. grupa.

$-(1+2i) \equiv (0,3,2)$
$-(1-2i) \equiv (0,3,3)$
$-(1+6i) \equiv (0,3,1)$
$-(1-6i) \equiv (0,3,0)$

12. grupa.

$-(3+2i) \equiv (2,1,0)$
$-(3-2i) \equiv (2,1,3)$
$-(3+6i) \equiv (2,1,1)$
$-(3-6i) \equiv (2,1,2)$

13. grupa.

$1 \equiv (0,0,0)$
$1+4i \equiv (0,0,1)$
$1-4i \equiv (0,0,3)$
$1+8i \equiv (0,0,2)$

14. grupa.

$-1 \equiv (2,0,0)$
$-1+4i \equiv (2,0,3)$
$-1-4i \equiv (2,0,1)$
$-1+8i \equiv (2,0,2)$

15. grupa.

$3 \equiv (2,2,3)$
$3+4i \equiv (2,2,2)$
$3-4i \equiv (2,2,0)$
$3+8i \equiv (2,2,1)$

16. grupa.

$-3 \equiv (0,2,3)$
$-3+4i \equiv (0,2,0)$
$-3-4i \equiv (0,2,2)$
$-3+8i \equiv (0,2,1).$

Ponajprije ćemo se zabaviti tjelesima $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$, koja su određena brojem $\sqrt[4]{\mu}$, a μ nije djeljiv sa λ.

I. slučaj. $\quad 1-\mu \equiv 0, \quad (\lambda), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^2).$

μ je ostatak prvih osam grupa; λ je sadržan u relativnoj diskriminanti $D_{1,k}$. Iz pretpostavke o broju μ izlazi kongruencija

$$1+M_1 \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^2),$$

ako je $\mathfrak{L}_1$ prost ideal tijela K_1, koji se nalazi u λ.

Digitized by Google

Uvedemo li pokratu:

$$\Omega_1 = 1 + M_1, \quad \Omega_2 = 1 + M_1^2, \quad \Omega_3 = (1 + M_1)(1 + M_1^2),$$

to postoje snošaji:

$$\begin{gathered}\Omega_1 \equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1^2), \qquad \Omega_2 \equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1^2), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1^3),\\ \Omega_3 \equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1^3), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1^4);\\ N_{1,k}(\Omega_1) = 1 - \mu \equiv 0, \quad (\lambda), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^2),\\ N_{1,k}(\Omega_2) = (1-\mu)^2 \equiv 0, \quad (\lambda^2), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^3),\\ N_{1,k}(\Omega_3) = (1-\mu)^3 \equiv 0, \quad (\lambda^3), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^4).\end{gathered}$$

Poradi tih snošaja postoji za svaki cijeli broj A_1 tijela K_1, koji nije djeljiv sa $\mathfrak{Q}_1$, kongruencija oblika:

$$\begin{gathered}A_1 \equiv \varkappa\ (1+\Omega_1)^{a_1} \quad (1+\Omega_2)^{a_2} \quad (1+\Omega_3)^{a_3}\\ (1+\lambda\Omega_1)^{a_1'} \quad (1+\lambda\Omega_2)^{a_2'} \quad (1+\lambda\Omega_3)^{a_3'}\\ \text{— — — — — — — — — — —}\\ (1+\lambda^6\Omega_1)^{a_1^{(6)}} (1+\lambda^6\Omega_2)^{a_2^{(6)}} (1+\lambda^6\Omega_3)^{a_3^{(6)}}, \qquad (\lambda^7);\end{gathered}$$

u toj je kongruenciji $\varkappa$ koji mu drago cio broj tijela k, koji nije djeljiv sa λ, a eksponentima a treba podijeliti vrijednosti $0, 1$. Svi brojevi, što se dobiju na taj način, jesu među sobom inkongruentni. Njihov broj 2^{37} podudara se s brojem ostataka u tijelu K_1 s obzirom na λ^7, koji nijesu djeljivi sa λ.

Iz zadnje kongruencije izlazi jednostavna kongruencija za $N_{1,k}(A_1)$. Ponajprije je $\varkappa^4 \equiv 1$, (λ^7), zatim je

$$\begin{aligned}&N_{1,k}(1+\lambda^t\Omega_3) \equiv 1 \quad \text{za svaki } t,\\ &N_{1,k}(1+\lambda^t\Omega_1) \equiv 1 \quad \text{za } t > 0, \qquad (\lambda^7),\\ &N_{1,k}(1+\lambda^t\Omega_2) \equiv 1 \quad \text{za } t > 2,\end{aligned}$$

pa ako se napokon obazremo na to, da je

$$\begin{aligned}&N_{1,k}(1+\lambda^2\Omega_2) \equiv 1 + 8i, \quad (\lambda^7),\\ &N_{1,k}(1+\lambda\Omega_2) \equiv 1 \quad \text{ili} \quad 1+8i, \quad (\lambda^7),\end{aligned}$$

možemo zadnju normu izostaviti, jer je $(1+8i)^2 \equiv 1$, (λ^7). te nam za $N_{1,k}(A_1)$ izlazi ova kongruencija:

$$N_{1,k}(A_1) \equiv (1+8i)^a N_{1,k}(1+\Omega_1)^b N_{1,k}(1+\Omega_2)^c N_{1,k}(1+\lambda\Omega_1)^d, \qquad (\lambda^7);$$

u njoj treba eksponentima a, b, c, d podijeliti vrijednosti $0, 1$.

Digitized by Google

Svih je 16 ostataka s obzirom na λ^7, što ih tako dobismo, među sobom inkongruentno, kako se vidi iz kongruencija:

$$\begin{aligned} &N_{1,k}(1+\Omega_1) \equiv 1+\lambda+\lambda^3\rho, \\ &N_{1,k}(1+\Omega_2) \equiv 1+\lambda^2+\lambda^3\sigma, \\ &N_{1,k}(1+\lambda\Omega_1) \equiv 1+\lambda^4+\lambda^5\tau, \\ &N_{1,k}(1+\lambda^3\Omega_2) \equiv 1+\lambda^6. \end{aligned} \qquad (\lambda^7)$$

u kojima su ρ, σ, τ izvjesni cijeli brojevi tijela k.

II. slučaj. $\quad 1-\mu \equiv 0, \quad (\lambda^2), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^3).$

Relativna diskriminanta $D_{1,k}$ sadržava λ. U tom je slučaju

$$1+M_1 \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^2), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^3).$$

Hoćemo li, da nađemo za cijele brojeve A_1 tijela K_1 kongruenciju analognu kongruenciji u prvom slučaju, treba potražiti u tijelu K_1 cio broj, koji je $\equiv 0, (\mathfrak{L}_1), \not\equiv 0, (\mathfrak{L}_1^2)$. Takav je broj n. pr.,

ako je $\mu \equiv 1+2i$, ili $\equiv (3+2i), \ (\lambda^1),$

$$\frac{1+\lambda M_1+M_1^2}{\lambda^2} \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^2),$$

„ „ $\mu \equiv 1-2i$, ili $\equiv -(3-2i), \ (\lambda^6),$

$$\frac{1+i\lambda M_1+M_1^2}{\lambda^2} \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^2).$$

Uvedemo li oznake:

$$\Omega_1 = \frac{1+\lambda M_1+M_1^2}{\lambda^2}, \text{ ili } = \frac{1+i\lambda M_1+M_1^2}{\lambda^2}; \quad \Omega_2 = 1+M_1;$$

$$\Omega_3 = \frac{(1+M_1)(1+\lambda M_1+M_1^2)}{\lambda^2}, \text{ ili } = \frac{(1+M_1)(1+i\lambda M_1+M_1^2)}{\lambda^2},$$

možemo za A_1 napisati kongruenciju

$$\begin{aligned} A_1 \equiv \alpha \ &(1+\Omega_1)^a \quad (1+\Omega_2)^b \quad (1+\Omega_3)^c \\ &(1+\lambda\Omega_1)^{a_1} \quad (1+\lambda\Omega_2)^{b_1} \quad (1+\lambda\Omega_3)^{c_1} \\ &\text{— — — — — — — — — — — —} \\ &(1+\lambda^5\Omega_1)^{a_5} \quad (1+\lambda^5\Omega_2)^{b_5} \quad (1+\lambda^5\Omega_3)^{c_5}. \end{aligned} \qquad (\lambda^6);$$

tu treba eksponentima podijeliti vrijednosti $0, 1$, a za $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ uzeti netom navedene vrijednosti, dok za α vrijedi isto, što u I. slučaju.

Digitized by Google

Promatramo li norme $N_{1,k}$ brojeva od oblika $1+\lambda^s M_1$ i λ^s+M_1, gdje s ima biti pozitivan cio racionalan broj, pa obazremo li se pri tom na to, da je produkt dvaju normnih ostataka opet normni ostatak, uvjerit ćemo se brzo, da su ostaci 11., 12., 13. i 16. grupe s obzirom na λ^7 normni ostaci s obzirom na λ. Istražimo li pak normu $N_{1,k}$ broja A_1, pokazat će nam lak račun, da osim navevedenih 16 normnih ostataka drugih nema.

III. slučaj. $\quad 1-\mu \equiv 0, \quad (\lambda^3), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^4).$

μ je ostatak 10. ili 11. grupe s obzirom na λ^7. Relativna diskriminanta $D_{1,k}$ opet sadržava λ. U tom nam je slučaju

$$1+M_1 \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1{}^3), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1{}^4),$$

ali je cijeli broj tijela K_1

$$\frac{(1+M_1)(1+M_1{}^2)}{\lambda^3} \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1{}^2).$$

Stoga možemo uvesti pokrate

$$\Omega_1 = \frac{(1+M_1)(1+M_1{}^2)}{\lambda^3}, \quad \Omega_2 = 1+M_1{}^2, \quad \Omega_3 = 1+M_1,$$

pa za svaki cijeli broj A_1 tijela K_1 napisati kongruenciju:

$$\begin{aligned} A_1 \equiv \alpha\ & (1+\Omega_1)^a \quad (1+\Omega_1{}^2)^b \quad (1+\Omega_3)^c \\ & (1+\lambda\Omega_1)^{a_1} \quad (1+\Omega_2)^{b_1} \quad (1+\lambda\Omega_3)^{c_1} \\ & (1+\lambda^2\Omega_1)^{a_2} \quad (1+\lambda\Omega_2)^{b_2} \quad (1+\lambda^2\Omega_3)^{c_2} \\ & - - - - - - - - - - - - \\ & (1+\lambda^5\Omega_1)^{a_5} \quad (1+\lambda^4\Omega_2)^{b_4} \quad (1+\lambda^5\Omega_3)^{c_5}, \qquad (\lambda^6); \end{aligned}$$

za α i eksponente vrijedi ono, što i u predašnjim slučajevima. Istražimo li normu $N_{1,k}$ broja A_1, uvjerit ćemo se lako, da su u tom slučaju ostaci 9., 12., 13. i 16. grupe s obzirom na λ^7 bikvadratni normni ostaci, no ti se ostaci mogu dobiti i promatranjem jednostavnih brojeva oblika $1+\lambda^s M_1$ i λ^s+M_1.

IV. slučaj. μ je ostatak 15. grupe s obzirom na λ^7. Osim toga slučaja promatrat ćemo još peti slučaj, u kom je μ ostatak 13. grupe. Ostale nam slučajeve nije od potrebe promatrati.

Istaknuti nam valja ponajprije, da su u svim tjelesima $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$, u kojima je $\mu \equiv \pm 1$, (λ^4), ostaci 13., 14., 15. i 16. grupe s ob-

Digitized by Google

zirom na λ^7 bikvadratni normni ostaci. O tom se lako uvjerimo, ako pretražimo norme $N_{1,k}$ brojeva od oblika $1+\lambda^3 M_1$ i λ^3+M_1, te se uz to poslužimo činjenicom, da je produkt dvaju normnih ostataka i opet normni ostatak.

No da nađemo ostale bikvadratne normne ostatke u slučaju, da je μ ostatak 15. grupe, ne možemo se više poslužiti postupkom, što smo ga dosada upotrebljavali, jer se λ doduše nalazi u diskriminanti $D_{1,k}$ ali se ne nalazi u diskriminanti D_k, pa nije više jednak četvrtoj potenciji prostoga ideala tijela K_1. Moramo tražiti drugi put.

Poslužit ćemo se činjenicom, da u tjelesima $k(\sqrt[4]{\mu}, i)$, što ih sada promatramo, $M_1 = \sqrt[4]{\mu}$ ne može biti kongruentan cijelomu broju tijela K s obzirom na λ. Da je tako, uvjerit ćemo se ovim načinom. Cijeli su brojevi tijela K od oblika

$$\frac{\alpha+\beta M_1^2}{\lambda^u},$$

gdje su α i β cijeli brojevi tijela k, a u može imati koju od vrijednosti $0, 1, 2$. Da pak bude

$$M_1 = \frac{\alpha+\beta M_1^2}{\lambda^u}, \quad (\lambda),$$

treba da je

$$\alpha - \lambda^u M_1 + \beta M_1^3 = 0, \quad (\lambda^{u+1})$$

$$N_{1,k}(\alpha - \lambda^u M_1 + \beta M_1^3) \equiv 0, \quad (\lambda^{4(u+1)}).$$

No ako doista načinimo tu normu, te se obazremo na uvjete § 1., što ih moraju ispuniti brojevi α i β, jer $\frac{\alpha - \lambda^u M_1 + \beta M_1^3}{\lambda^{u+1}}$ treba da bude cio broj, pokazat će nam račun, da zadnja kongruencija ne može postojati.

Označimo li sada brojeve $1+M_1$ i $M_1(1+M_1^3)$ sa Ω_1 i Ω_2, izlazi iz dokazane činjenice, da brojevi

$$1+\Omega_1, \quad 1+\lambda\Omega_1, \quad 1+\lambda^2\Omega_1, \ldots\ldots 1+\lambda^5\Omega_1,$$
$$1+\Omega_2, \quad 1+\lambda\Omega_2, \quad 1+\lambda^2\Omega_2, \ldots\ldots 1+\lambda^4\Omega_2,$$

koji su poradi kongruencija

Digitized by Google

$$\Omega_1 \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^2);$$
$$\Omega_2 \equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^2), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{L}_1^3)$$

među sobom inkongruentni s obzirom na λ^6, ne mogu biti kongruentni kojemu cijelomu broju tijela K s obzirom na λ^6. $\mathfrak{L}_1$ je prost ideal tijela K_1, kojim je λ djeljiv, a u našem je slučaju $\lambda = \mathfrak{L}_1^2 . S\mathfrak{L}_1^3$.

Po tom su svi brojevi oblika

$$(1) \quad A\,(1+\Omega_1)^a\,(1+\lambda\Omega_1)^{a_1}\,(1+\lambda^2\Omega_1)^{a_2} \ldots\ldots (1+\lambda^5\Omega_1)^{a_5}$$
$$(1+\Omega_2)^b\,(1+\lambda\Omega_1)^{b_1}\,(1+\lambda^2\Omega_2)^{b_2} \ldots\ldots (1+\lambda^4\Omega_2)^{b_4},$$

gdje je A koji mu drago prema λ prost cio broj u K, a eksponenti a_i, b_k mogu imati koju od vrijednosti 0, 1, među sobom inkongruentni s obzirom na λ^6. Broj svih inkongruentnih ostataka tijela K_1 s obzirom na λ^6, koji su prosti prema λ, 2^{12} puta je veći nego broj takvih inkongruentnih ostataka tijela K s obzirom na λ^6. Prema tomu čine navedeni inkongruentni brojevi s obzirom na λ^6 samo polovinu mogućih prema λ prostih ostataka tijela K_1 s obzirom na λ^6. Cijeli broj

$$\frac{1+M_1+iM_1^2-iM_1^3}{\lambda^3}$$

sigurno nije nijednome od navedenih brojeva kongruentan s obzirom na λ^6, jer su norme $N_{1,k}$ tih brojeva ostaci 13., 14., 15. i 16. grupe s obzirom na λ^7, kako se već iz njihove građe vidi, dok je norma $N_{1,k}$ broja $\frac{1+M_1+iM_1^2-iM_1^3}{\lambda^3}$ ostatak 6. ili 7. grupe; postoji naime kongruencija:

$$N_{1,k}\left(\frac{1+M_1+iM_1^2-iM_1^3}{\lambda^3}\right) \equiv 2-i, \quad (\lambda^4),$$

jer je μ ostatak 15. grupe s obzirom na λ^7.

Pridodamo li dakle brojevima (1), što ih već nađosmo, produkt svakoga pojedinoga s brojem $\frac{1+M_1+iM_1^2-iM_1^3}{\lambda^3}$, dobit ćemo tako potpun sustav prema λ prostih inkongruentnih brojeva tijela K_1 s obzirom na λ^6.

Načinimo li sada norme $N_{1,k}$ svih tih brojeva, pa promislimo, da moraju svi ostaci 5., 6., 7. i 8. grupe biti bikvadratni normni

Digitized by Google

ostaci, kako je samo i jedan ostatak tih grupa bikvadratan normni ostatak, jer su svi ostaci 13., 14., 15. i 16. grupe bikvadratni normni ostaci, razabrat ćemo odmah, da polovina mogućih ostataka tijela k s obzirom na λ^7 daje bikvadratne normne ostatke s obzirom na λ.

V. slučaj. μ je ostatak 13. grupe s obzirom na λ^7.

Relativna diskriminanta $D_{1,k}$ nije djeljiva sa λ. Pokazat ćemo, da su u tom slučaju sva 64 ostatka s obzirom na λ^7 normni ostaci s obzirom na λ.

Po onom, što smo kazali kod IV. slučaja, sigurno su ostaci 13., 14., 15. i 16. grupe s obzirom na λ^7 u sadašnjem slučaju bikvadratni normni ostaci s obzirom na λ. Nadalje nalazimo, da je

$$N_{1,k}\left(\frac{1+iM_1+(1+2i)M_1^2-iM_1^3}{\lambda^3}\right)\equiv i, \quad (\lambda^4),$$

ako je $\mu\equiv 1$, (λ^6). Norma je toga broja dakle ostatak prvih četiriju grupa s obzirom na λ^7. Iz toga već izlazi, da su svi ostaci tih četiriju grupa bikvadratni normni ostaci s obzirom na λ. No budući da je norma $N_{1,k}$ cijeloga broja $\frac{1+M_1+iM_1^2+M_1^3}{\lambda}$:

$$N_{1,k}\left(\frac{1+M_1+iM_1^2+M_1^3}{\lambda}\right)\equiv 1+2i, \quad (\lambda^4),$$

to moraju svi ostaci s obzirom na λ^7 biti bikvadratni normni ostaci s obzirom na λ.

Ako je $\mu\equiv 1+4i$, (λ^6), zaključujemo poradi toga, što je

$$N_{1,k}\left(\frac{1+M_1+iM_1^2+M_1^3}{\lambda}\right)\equiv -1+2i, \quad (\lambda^4),$$

da su ostaci predzadnjih četiriju grupa s obzirom na λ^7 bikvadratni normni ostaci s obzirom na λ. No budući da je

$$N_{1,k}\left(\frac{1+M_1}{\lambda}\right)\equiv i, \quad (\lambda^2)$$

sigurno ostatak prvih osam grupa, to već odatle izlazi, da su svi cijeli brojevi tijela k, koji nijesu djeljivi sa λ, bikvadratni normni ostaci s obzirom na λ.

Digitized by Google

VI. slučaj. $\mu \equiv 0, \quad (\lambda), \quad \not\equiv 0, \quad (\lambda^2).$

Za λ vrijedi jednadžba $\lambda = \mathfrak{Q}_1^4$, gdje je $\mathfrak{Q}_1$ prost i deal tijela K_1 Stoga je

$$M_1 \equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1), \quad \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{Q}_1^2),$$

pa se može za svaki cijeli broj A_1 tijela K_1 naći kongruencija

$$\begin{aligned} A_1 \equiv \alpha\ & (1+M_1)^a \ (1+M_1^2)^b \ (1+M_1^3)^c \\ & (1+\lambda M_1)^{a_1} \ (1+\lambda M_1^2)^{b_1} \ (1+\lambda M_1^3)^{c_1} \\ & - - - - - - - - - - - - \\ & (1+\lambda^6 M_1)^{a_6} \ (1+\lambda^6 M_1^2)^{b_6} \ (1+\lambda^6 M_1^3)^{c_6}, \qquad (\lambda^7); \end{aligned}$$

α je cio broj tijela k, a eksponenti a_i, b_k, c_l mogu imati koju od vrijednosti $0, 1$.

Lako se možemo uvjeriti, da je

$$N_{1,k}(1+\lambda^t M_1^g) \equiv 1, \qquad (\lambda^7),$$

ako je $t \geqq 2$, a $g = 1, 2$ ili 3; nadalje, da je

$$N_{1,k}(1+\lambda M_1^g) \equiv 1, \qquad (\lambda^7),$$

i konačno, da je

$$N_{1,k}(1+\lambda M_1) \equiv N_{1,k}(1+\lambda M_1^2), \qquad (\lambda^7).$$

Prema tomu dobivamo za $N_{1,k}(A_1)$ ovu kongruenciju:

$$N_{1,k}(A_1) \equiv (1-\mu)^a (1-\mu)^{2b} (1-\mu^3)^c (1-4\mu)^{a_1}, \qquad (\lambda^7).$$

Tih 16 ostataka svi su među sobom inkongruentni.

Sada možemo u svakom slučaju, što smo ih promatrali, bikvadratne normne ostatke u istinu izračunati. Resultati računa sastavljeni su u ovoj tablici. Sa ν označih bikvadratne normne ostatke, koji nijesu djeljivi sa λ.

Digitized by Google

$\mu \equiv (a, b, c)$, (λ^7)	$\nu \equiv (a', b', c')$, (λ^7)
$a \not\equiv 0$, (2); $b = 0$	$b' = 0$
$a \not\equiv 0$, (2); $b = 2$	$2a' + b' \equiv 0$, (4)
$a = b \not\equiv 0$, (2); $a + b \equiv 2$, (4)	$a' + b' \equiv 0$, (4)
$a \not\equiv 0$, (2); $b \not\equiv 0$, (2); $a + b = 4$	$a' = b'$
$a = 2$; $b \not\equiv 0$, (2)	$a' = 0$
$a = 0$; $b \not\equiv 0$, (2)	$a' + 2b' \equiv 0$, (4)
$a = b = 0$	a', b', c' *povoljno*
$a = b = 2$	$a' + b' \equiv 0$, (2)
$\mu : \lambda \equiv (a, b, c)$, (λ^7)	
$a = 1$, $b = 0$	$2b' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 3$, $b = 0$	$c' = 0$
$a = 3$, $b = 2$	$2a' + c' \equiv 0$, (4)
$b = 1$, $b = 2$	$2(a' + b') + c' \equiv 0$, (4)
$a = 3$, $b = 3$	$a' + 2b' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 1$, $b = 1$	$a' - c' \equiv 0$, (4)
$a = 1$, $b = 3$	$a' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 3$, $b = 1$	$a' + 2b' - c' \equiv 0$, (4)
$a = 2$, $b = 3$	$a' + b' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 0$, $b = 1$	$a' + b' - c' \equiv 0$, (4)
$a = 0$, $b = 3$	$a' - b' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 2$, $b = 1$	$a' - b' - c' \equiv 0$, (4)
$a = 0$, $b = 0$	$b' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 2$, $b = 0$	$b' = c'$, $b' - c' \equiv 0$, (4)
$a = 2$, $b = 2$	$2a' - b' + c' \equiv 0$, (4)
$a = 0$, $b = 2$	$2a' - b' - c' \equiv 0$, (4)

Digitized by Google

Iz te tablice vidimo, da je ν onda i samo onda s obzirom na λ bikvadratan normni ostatak tijela k $(\sqrt[4]{\mu}, i)$, za koje je $\mu \nmid o$, (λ), ako je

$$i^{a'b - ab' + 2bb'} = 1.$$

Nadalje razabiramo, ako je $\mu \equiv o$, (λ), a $\frac{\mu}{\lambda} \equiv (a, b, c)$, (λ'), da je ν samo onda bikvadratan normni ostatak tijela k $(\sqrt[4]{\mu}, i)$ s obzirom na λ, ako je

$$i^{b'+c' - (a'b - ab' + 2bb')} = 1.$$

Uvest ću poseban simbol

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right\},$$

i definirati ga ovako. Ako je $\mu \nmid o$, (λ), neka bude

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right\} = i^{a'b - ab' + 2bb'};$$

ako je pak $\mu \equiv o$, (λ), a $\frac{\mu}{\lambda} \equiv (a, b, c)$, (λ'), stavit ćemo

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right\} = i^{b'+c' - (a'b - ab' + 2bb')}$$

Za one vrijednosti broja μ, što su sadržane u tablici, ν je onda i samo onda bikvadratan normni ostatak tijela k $\sqrt[4]{\mu}, i)$ s obzirom na λ, ako je

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right\} = 1.$$

Od snošajeva, što postoje za taj novi simbol, navest ćemo samo neke, koji će nam poslije trebati.

Neka budu μ, μ_1, μ_2 tri prema λ prosta cijela broja tijela k, koji su različni od ± 1 i nijesu djeljivi nikakvim kvadratom cijela broja tijela k; nadalje ν, ν_1, ν_2 tri koja mu drago prema λ prosta cijela broja istoga tijela, to valjaju ove jednadžbe:

Digitized by Google

$$\left\{\frac{\nu_1\nu_2,\ \mu}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\nu_1,\ \mu}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\nu_2,\ \mu}{\lambda}\right\},$$

(1)
$$\left\{\frac{\nu,\ \mu_1\mu_2}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\nu,\ \mu_1}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\nu,\ \mu_2}{\lambda}\right\},$$

$$\left\{\frac{\mu_1,\ \mu_2}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\mu_2,\ \mu_1}{\lambda}\right\} = 1;$$

(2)
$$\left\{\frac{\nu,\ \lambda\mu}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\nu,\ \lambda}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\nu,\ \mu}{\lambda}\right\}^{-1}.$$

Ispravnost tih jednadžbi izlazi iz same definicije simbola. U drugoj jednadžbi (1) treba da su μ_1 i μ_2 relativno prosti brojevi.

§ 5.

Dvolični ideali u tjelesima K i K_1.

Prosti ideali tijela K, koji su sadržani u relativnoj diskriminanti D_k kao faktori, odlikuju se tim, da ostanu nepromijenjeni, ako se podvrgnu supstituciji S. Isto se tako ne mijenjaju prosti ideali tijela K_1, koji su sadržani u diskriminanti $D_{1,K}$, ako se na njih primijeni supstitucija S_1^2. Proste ideale prve vrste nazvasmo dvoličnima u tijelu K s obzirom na tijelo k, a proste ideale druge vrste dvoličnima u tijelu K_1 s obzirom na K.

Poznato je, da se osim navedenih prostih ideala nijedan prost ideal tijela K ili K_1 ne odlikuje pomenutim svojstvom.

Nadalje smo nazvali proste ideale tijela K_1, koji se ne mijenjaju, ako se podvrgnu supstituciji S_1, dvoličnima u tijelu K_1 s obzirom na k.

Razlikujemo dvije vrste takovih prostih ideala: jedni daju dignuti na četvrtu potenciju broj tijela k, dok drugi dignuti već na drugu potenciju daju takav broj. U tjelesima, što ih mi promatramo, pripadaju svi dvolični prosti ideali tijela K_1 s obzirom na K, koji nijesu sadržani u λ, k prvoj vrsti. Budući da smo brojeve μ, koji pripadaju k 14. i 16. grupi ostataka s obzirom na λ^7, isključili, pripada prosti ideal $\mathfrak{P}_1$ tijela K_1 sadržan u λ k drugoj vrsti dvoličnih prostih ideala samo onda, ako je $\mu \equiv 3$, (λ^6), dok je u slučaju $\mu \equiv 3 + 4i$, (λ^6) prosti ideal $\mathfrak{P}_1$ dvoličan s obzirom na K, ali nije s obzirom na k.

Digitized by Google

Analogno ćemo svaki ideal $\mathfrak{A}_k$ tijela K zvati dvoličnim u K s obzirom na k, ako se ne promijeni podvrgnut supstituciji S i ako ne sadržava nikakav broj tijela k kao faktor; nadalje svaki ideal $\mathfrak{A}_{1,K}$ tijela K_1 dvoličnim u K_1 s obzirom na K, ako se ne promijeni podvrgnut supstituciji $S_1^{\,s}$ i ako ne sadržava nikakav ideal tijela K kao faktor; napokon svaki ideal $\mathfrak{A}_{1,k}$ tijela K_1 dvoličnim u K_1 s obzirom na k, ako se ne promijeni porabom supstitucije S_1 i ako uz to ne sadržava nikakav broj tijela k kao faktor.

Ako se označe sa $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_t$ prosti ideali tijela K, koji su u diskriminanti D_k sadržani kao faktori, to se mogu svi dvolični ideali $\mathfrak{A}_k$ prikazati u obliku

$$\mathfrak{L}_1^{a_1}\ \mathfrak{L}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{L}_t^{a_t},$$

ako eksponentima podijelimo vrijednosti *0*, *1*.

Označimo li sa $\mathfrak{L}_{1,1}, \mathfrak{L}_{1,2}, \ldots \mathfrak{L}_{1,t}$ proste ideale tijela K_1, koji su u diskriminanti $D_{1,K}$ sadržani kao faktori, možemo sve dvolične ideale $\mathfrak{A}_{1,K}$ prikazati u obliku

$$\mathfrak{L}_{1,1}^{a_1}\ \mathfrak{L}_{1,2}^{a_2} \ldots \mathfrak{L}_{1,t}^{a_t},$$

ako eksponentima podijelimo vrijednosti *0*, *1*.

Treba još da istražimo dvolične ideale $\mathfrak{A}_{1,k}$. Ti ideali zadovoljavaju jednadžbu

$$S_1\mathfrak{A}_{1,k} = \mathfrak{A}_{1,k}.$$

Rastavit ćemo $\mathfrak{A}_{1,k}$ u proste ideale, pa neka bude

$$\mathfrak{A}_{1,k} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1\mathfrak{S}_1 \ldots,$$

gdje nam $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{S}_1 \ldots$ označuju proste ideale tijela K_1. Podvrgnimo tu jednadžbu supstituciji S_1, pa ćemo dobiti

$$S_1\mathfrak{A}_{1,k} = S_1\mathfrak{P}_1 \,.\, S_1\mathfrak{Q}_1 \,.\, S_1\mathfrak{R}_1 \,.\, S_1\mathfrak{S}_1 \ldots,$$

no budući da je $S_1\mathfrak{A}_{1,k} = \mathfrak{A}_{1,k}$, moraju produkti $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1\mathfrak{S}_1 \ldots$ i $S_1\mathfrak{P}_1 \,.\, S_1\mathfrak{Q}_1 \,.\, S_1\mathfrak{R}_1 \,.\, S_1\mathfrak{S}_1 \ldots$ sadržavati iste proste ideale i u

Digitized by Google

istom broju. Uzmimo, da je $S_1\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}_1$, ali $S_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{Q}_1$, to sadržava $\mathfrak{A}_{1,k}$ produkt $\mathfrak{P}_1 \cdot S_1\mathfrak{P}_1$ kao faktor. Kad bi bilo još i $S_1{}^2\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}_1$, morao bi se sav broj $N_{1,k}(\mathfrak{P}_1)$ sadržavati u idealu $\mathfrak{A}_{1,k}$, no to se ne slaže sa svojstvom toga ideala. Ako dakle $\mathfrak{P}_1$ nije dvoličan s obzirom na k, svakako mora biti dvoličan s obzirom na K. To je pak u našim tjelesima moguće samo kod prostoga ideala $\mathfrak{L}_1$, koji je u λ sadržan, i to, ako je $\mu \equiv 3+4i$, (λ^6).

Vidimo dakle, da dvolični ideal $\mathfrak{A}_{1,k}$ sadržava samo dvolične proste ideale s obzirom na k kao faktore, i da samo u slučaju $\mu \equiv 3+4i$, (λ^6) može povrh toga još sadržavati produkt idealâ $\mathfrak{L}_1'$ i $S_1\mathfrak{L}_1$ tijela K_1, koji se nalaze u λ.

§ 6.

Dvolični idealski razredi $A_{1,K}$.

Svaki ćemo idealski razred tijela K_1, koji se supstitucijom S_1[2] ne mijenja, zvati dvoličnim s obzirom na tijelo K, pa obilježiti ga sa $A_{1,K}$ tako, da postoji jednadžba:

$$S_1 A_{1,K} = A_{1,K}.$$

Prva je zadaća, da se odredi stepen razredne sveze[1], koja je određena dvoličnim idealskim razredima $A_{1,K}$.

Gospodin je Hilbert istražio razrednu svezu, što je čine dvolični idealski razredi relativno kvadratnoga tijela pod pretpostavkom, da je podređeno tijelo uza sva svoja konjugirana tjelesa imaginarno, a broj idealskih razreda toga podređenoga tijela neparan broj. Prvi je uvjet i u našim tjelesima $K = k(\sqrt{\mu}, i)$ zadovoljen, no zadnji ne mora biti. Ipak se može na sličan način s nekim promjenama odrediti stepen spomenute razredne sveze.

Ponajprije nam valja odrediti stepen onoj razrednoj svezi, što je čine idealski razredi, koji potječu od dvoličnih ideala, to znači, koji sadržavaju među svojim idealima dvolične ideale tijela K_1 ili pak produkte takovih ideala s idealima tijela K.

Isključit ćemo zasada slučaj, u kom je $K = k(\sqrt{i}, i)$. Ako tada jedinice tijela K, koje su jednake normama $N_{1,K}$ jedinica tijela K_1, čine svezu jedinica[2] stepena v, to nam idealski razredi, koji

[1] Classenschaar.

[2] Einheitenschaar, Einheitenverband.

Digitized by Google

od dvoličnih ideala potječu, čine razrednu svezu stepena $t+v-3$, ako sa t označimo broj prostih ideala tijela K_1, koji su u relativnoj diskriminanti $D_{1,K}$ sadržani kao faktori.

Makar kolik bio v, iz jednadžbe

$$\sqrt[s]{\mu} = M_1 = \mathfrak{L}_{1,1}\,\mathfrak{L}_{1,2}\,\ldots\ldots\,\mathfrak{L}_{1,s},$$

gdje su $\mathfrak{L}_{1,1}, \mathfrak{L}_{1,2}, \ldots\ldots \mathfrak{L}_{1,s}$ ili svi dvolični prosti ideali tijela K_1 ili svi osim idealâ, koji su u λ sadržani kao faktori, vidimo, da se jedan između razredâ $L_{1,1}, L_{1,2}, \ldots\ldots L_{1,s}$, koji potječu od idealâ $\mathfrak{L}_{1,1}, \mathfrak{L}_{1,2}, \ldots\ldots \mathfrak{L}_{1,s}$, može izraziti ostalima $s-1$ razredima. Sada još treba istražiti, da li su ti razredi među sobom neovisni.

Poznato je, da se može u tijelu K_1 poradi osobite građe tijela K naći sustav temeljnih jedinica[1] $H_{1,1}, H_{1,2}$, koji se odlikuje tim, da $H_{1,1}^{a_1} H_{1,2}^{a_2}[\theta]$, gdje su a_1, a_2 cijeli racionalni brojevi, a $[\theta]$ jedinica u K_1, kojoj je kvadrat u K, može samo tako biti simbolična $(1-S_1^{\,2})^{\text{ta}}$ potencija[2] koje jedinice E_1 tijela K_1, da budu a_1 i a_2 taki brojevi. Nadalje se može za svaku jedinicu E_1 tijela K_1 odrediti lih eksponent f tako, da bude

$$E^f = H_{1,1}^{a_1}\, H_{1,2}^{a_2}\,[\theta],$$

gdje a_1, a_2 i $[\theta]$ imaju predašnje značenje.

Ako je pak E norma $N_{1,K}$ koje jedinice tijela K_1 i ako stavimo

$$H_1 = N_{1,K}(H_{1,1}),\quad H_2 = N_{1,K}(H_{1,2}),$$

to postoji uvijek jednadžba oblika

$$E = H_1^{b_1}\, H_2^{b_2}\,[\theta^*]$$

b_1 i b_2 jesu cijeli racionalni brojevi, a $[\theta^*]$ ima predašnje značenje.

Ako jedinice tijela K, koje su jednake relativnim normama $N_{1,K}$ jedinica tijela K_1, čine svezu jedinica drugoga stepena, to je prije spomenutih $s-1$ idealskih razreda među sobom neovisno, o čem se možemo uvjeriti, ako isto onako postupamo, kao gospodin Hilbert u svojoj teoriji Kummerova brojnoga tijela.

---

[1] ein System von Grundeinheiten.

[2] po Kroneckeru.

Digitized by Google

No ako rečene jedinice tijela K čine svezu jedinica prvoga stepena, to valja za svaku takovu jedinicu E jednadžba oblika:

$$E = H_1^{a_1}\ \theta^{s};$$

a_1 je cio racionalan broj, a θ jedinica tijela K. I za normu $N_{1,K}(H_{1,2}) = H_2$ druge temeljne jedinice mora postojati takova jednadžba; neka bude

$$H_2 = H_1^{b_1}\ \theta^{*s},$$

gdje je b_1 opet cio racionalan broj, a θ^* jedinica tijela K.

Poradi te jednadžbe valja za jedinicu

$$E_1 = H_{1,1}^{b_1}\ H_{1,2}\ \theta^{*-1}$$

jednadžba:

$$N_{1,K}(E_1) = 1.$$

Stavimo li pokrate radi

$$1 + E_1 = A_1,$$

to je

$$A_1^{1-S_1^2} = E_1.$$

Možemo dokazati, da glavni ideal A_1 nije ideal tijela K, a nije ni produkt takova ideala s brojem M_1. Kad bi to tako bilo, izlazila bi u oba slučaja jednadžba oblika

$$H_{1,1}^{b_1}\ H_{1,2}\ \theta^{*-1} = E_2^{1-S_1^2},$$

u kojoj je E_2 jedinica tijela K_1. To bi pak bilo protivno temeljnomu svojstvu jedinica $H_{1,1}$, $H_{1,2}$.

Napokon može biti $v = o$. Tada moraju postojati dvije jednadžbe oblika

$$H_1 = \theta^{s},\ H_2 = \theta^{*s}.$$

Promotrimo jedinice

$$E_1 = H_{1,1}\,\theta^{-1},\ E_2 = H_{1,2}\,\theta^{*-1}.$$

Za njih vrijede jednadžbe:

Digitized by Google

$$N_{1,K}(E_1) = 1, \quad N_{1,K}(E_2) = 1.$$

Stavimo li

$$1 + E_1 = A_1, \quad 1 + E_2 = A_2,$$

to postoje snošaji:

$$A_1^{1-S_1^2} = E_1, A_2^{1-S_1^2} = E_2.$$

Kao što smo u predašnjem slučaju pokazali za A_1, tako možemo sada pokazati za A_1 i A_2, da nijesu ideali tijela K, a ni produkti takovih ideala sa M_1. No A_1 i A_2 ne mogu ni među sobom biti jednaki ni razlikovati se možda samo faktorom, koji je ideal u tijelu K, jer bi u oba takova slučaja izlazila jednadžba, koja se ne slaže s temeljnim svojstvom jedinica $H_{1,1}$, $H_{1,2}$.

Označimo li sada sa $L_{1,1}, L_{1,2}, \ldots L_{1,t}$ idealske razrede, koji potječu od prostih ideala $\mathfrak{L}_{1,1}, \mathfrak{L}_{1,2}, \ldots \mathfrak{L}_{1,t}$ tijela K_1, to izlazi iz onoga, što smo netom razvili, da u slučaju $v = 1$ ima ponajviše $t-2$, a u slučaju $v = o$ ponajviše $t-3$ neovisnih idealskih razreda.

Hoćemo li pak, da dokažemo, da je broj tih neovisnih idealskih razreda upravo $t-2$ ili $t-3$. a ne manji, treba da postupamo onako, kao što postupa gospodin Hilbert kod sličnoga istraživanja u Kummerovu tijelu[1].

I u slučaju $K_1 = k(\sqrt{i}, i)$ uvjerit ćemo se o ispravnosti postavljene tvrdnje o stepenu razredne sveze, što je čine idealski razredi, koji potječu od dvoličnih ideala, ako se poslužimo Hilbertovim postupkom za analogni slučaj Kummerova tijela[1]. Pri tom valja znati, da je broj idealskih razreda tijela $K = (\sqrt{i}, i)$ lih.

Kako je taj poučak dokazan, lako ćemo izvesti po Hilbertu[2] poučak o stepenu razredne sveze, što je čine svi dvolični idealski razredi $A_{1,K}$. Ako sa v_1 označimo stepen sveze, što je čine jedinice tijela K, koje su bilo norme $N_{1,K}$ jedinica bilo norme $N_{1,K}$ slomljenih brojeva tijela K_1, naći ćemo, da je stepen rečene razredne sveze $t+v_1-3$, ako nam t označuje broj dvoličnih prostih ideala tijela K_1.

---

[1] Jahresbericht IV, § 147, str. 449.
[2] Jahresbericht IV, § 148, str. 458.

Digitized by Google

§ 7.

Karakterni sustav brojeva i ideala tjelesa k, K i K_1.

Ako je cijeli broj α tijela k kvadratan normni ostatak s obzirom na prosti broj π tijela k, t. j. ako za svaku potenciju π^e broja π, u kojoj je e pozitivan cio racionalan broj, postoji kongruencija

$$\alpha \equiv N_k(A), (\pi^e),$$

gdje je A cio broj tijela K, razumijevat ćemo pod znakom

$$\left(\frac{\alpha, \mu}{\pi}\right)$$

broj $+1$; u drugom slučaju broj -1.

Uzmemo li drugi cio broj β tijela k, vrijedi, kako je poznato, ovaj snošaj:

$$\left(\frac{\alpha\beta, \mu}{\pi}\right) = \left(\frac{\alpha, \mu}{\pi}\right)\left(\frac{\beta, \mu}{\pi}\right).$$

Neka budu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_t$ prosti brojevi, koji su sadržani kao faktori u diskriminanti D_k, a ν koji mu drago cio broj u k, to ćemo zvati

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda_1}\right), \left(\frac{\nu, \mu}{\lambda_2}\right), \ldots \left(\frac{\nu, \mu}{\lambda_t}\right)$$

karakternim sustavom broja ν u tijelu K.

I svakomu idealu $\mathfrak{J}$ tijela K možemo na sličan način pridijeliti karakterni sustav, i to ovako. Ako su svi simboli

$$\left(\frac{i, \mu}{\lambda_1}\right), \left(\frac{i, \mu}{\lambda_2}\right), \ldots \left(\frac{i, \mu}{\lambda_t}\right)$$

jednaki $+1$, neka se zove

$$\left(\frac{N_k(\mathfrak{J}), \mu}{\lambda_1}\right), \left(\frac{N_k(\mathfrak{J}), \mu}{\lambda_2}\right), \ldots \left(\frac{N_k(\mathfrak{J}), \mu}{\lambda_t}\right)$$

karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}$. Ako pak među simbolima karakternoga sustava broja i ima i takovih, kojima je vri-

Digitized by Google

jednost -1, a jedan je tih simbola n. pr. $\left(\frac{i, \mu}{\lambda_t}\right)$, pomnožit ćemo $N_k(\mathfrak{Z})$ prikladnom potencijom broja i tako, da bude

$$\left(\frac{N_k(\mathfrak{Z}), \mu}{\lambda_t}\right) = 1,$$

i nazvati

$$\left(\frac{N_k(\mathfrak{Z}), \mu}{\lambda_1}\right), \left(\frac{N_k(\mathfrak{Z}), \mu}{\lambda_2}\right), \ldots \left(\frac{N_k(\mathfrak{Z}), \mu}{\lambda_{t-1}}\right)$$

karakternim sustavom ideala $\mathfrak{Z}$.

Pođimo sada, da ustanovimo kvadratni karakterni sustav za brojeve tijela K.

A neka bude cio broj tijela K, a $\mathfrak{P}$ prost ideal toga tijela. Razumijevat ćemo pod znakom

$$\left(\frac{A, M}{\mathfrak{P}}\right)$$

broj $+1$, ako se dade za svaku potenciju $\mathfrak{P}^e$ sa pozitivnim cijelim racionalnim eksponentom prostoga ideala $\mathfrak{P}$ naći kongruencija oblika

$$A \equiv N_{1,K}(A_1), \quad (\mathfrak{P}^e),$$

u kojoj je A_1 cio broj tijela K_1; u drugom slučaju broj -1.

Obazremo li se na ono, što je rečeno u predašnjem paragrafu o dvoličnim idealskim razredima $A_{1,K}$, doći ćemo isto onako, kao i gospodin Hilbert u svojoj raspravi: „Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers“ do jednadžbi, koje su za uvedeni simbol značajne. Ako su naime A i B dva cijela broja u K; $M = \sqrt{\mu}$, $M^* = \sqrt{\mu^*}$ dva druga korijena cijelih brojeva μ i μ^* tijela k, koji se razlikuju od ± 1 i nijesu djeljivi nikakvim kvadratom cijela broja, vrijede ove jednadžbe:

$$\left(\frac{AB, M}{\mathfrak{P}}\right) = \left(\frac{A, M}{\mathfrak{P}}\right)\left(\frac{B, M}{\mathfrak{P}}\right),$$

$$\left(\frac{A, MM^*}{\mathfrak{P}}\right) = \left(\frac{A, M}{\mathfrak{P}}\right)\left(\frac{A, M^*}{\mathfrak{P}}\right)$$

$$\left(\frac{M, M^*}{\mathfrak{P}}\right) = \left(\frac{M^*, M}{\mathfrak{P}}\right);$$

u drugoj jednadžbi mora biti $(M, M^*) = 1$.

Digitized by Google

Označit ćemo sa $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_t$ proste ideale tijela K, koji su kao faktori sadržani u diskriminanti $D_{1,K}$. Ako je tada A kojigod cio broj u K, zvat ćemo

$$\left(\frac{A, M}{\mathfrak{L}_1}\right), \left(\frac{A, M}{\mathfrak{L}_2}\right), \ldots \left(\frac{A, M}{\mathfrak{L}_t}\right)$$

kvadratnim karakternim sustavom broja A u tijelu K_1.

Ako je pak $\mathfrak{J}_1$ koji mu drago ideal u K_1, a $\mathfrak{J} = N_{1,K}(\mathfrak{J}_1)$, to je $\mathfrak{J}$ ideal tijela K. Predočuje li nam h broj idealskih razreda tijela K, to je $I = \mathfrak{J}^h$ glavni ideal u K.

Uzmimo, da se kvadratni karakterni sustav svih jedinica tijela K sastoji od samih pozitivnih jedinica $+1$; onda ćemo zvati

$$\left(\frac{I, M}{\mathfrak{L}_1}\right), \left(\frac{I, M}{\mathfrak{L}_2}\right), \ldots \left(\frac{I, M}{\mathfrak{L}_t}\right)$$

kvadratnim karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}_1$.

Ima li pak u K koja jedinica E, kojoj kvadratni karakterni sustav ne sadržava same pozitivne jedinice $+1$, nego je n. pr. $\left(\frac{E, M}{\mathfrak{L}_t}\right) = -1$, promatrat ćemo sve jedinice H tijela K, za koje je

$$\left(\frac{H, M}{\mathfrak{L}_t}\right) = +1.$$

Ima li među tima jedinicama koja jedinica E', za koju simboli

$$\left(\frac{E', M}{\mathfrak{L}_1}\right), \left(\frac{E', M}{\mathfrak{L}_2}\right), \ldots \left(\frac{E', M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right)$$

nemaju svi vrijednost $+1$, nego je n. pr.

$$\left(\frac{E', M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right) = -1,$$

pogledat ćemo, kao što smo učinili kod jedinice E', sve jedinice H' u K, za koje je

$$\left(\frac{H', M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right) = +1.$$

Digitized by Google

Ako među njima ima koja jedinica E'', za koju svi simboli

$$\left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_1}\right), \left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_2}\right), \ldots \left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_{t-2}}\right)$$

nemaju vrijednost $+1$, nego je n. pr.

$$\left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_{t-2}}\right) = -1,$$

promatrat ćemo opet one jedinice H'' tijela K, za koje je

$$\left(\frac{H'', M}{\mathfrak{L}_{t-2}}\right) = +1$$

i postupati s tima jedinicama H'' onako, kako smo učinili s jedinicama H i H'.

Nastavimo li taj postupak, dobit ćemo napokon cio sustav jedinica

$$E, E', E'', \ldots . E^{(r^*-1)},$$

koji zadovoljava jednadžbe:

$$\left(\frac{E, M}{\mathfrak{L}_t}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{E', M}{\mathfrak{L}_t}\right) = +1, \left(\frac{E', M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_t}\right) = +1, \left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right) = +1, \left(\frac{E'', M}{\mathfrak{L}_{t-2}}\right) = -1,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\left(\frac{E^{(r^*-1)}, M}{\mathfrak{L}_t}\right) = +1, \left(\frac{E^{(r^*-1)}, M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right) = +1, \left(\frac{E^{(r^*-1)}, M}{\mathfrak{L}_{t-2}}\right) = +1, \ldots$$

$$\ldots . \left(\frac{E^{(r^*-1)}, M}{\mathfrak{L}_{t-r^*+1}}\right) = -1,$$

a uz to se odlikuje tim, da za svaku jedinicu θ tijela K, za koju je

$$\left(\frac{\theta, M}{\mathfrak{L}_t}\right) = +1, \left(\frac{\theta, M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right) = +1, \ldots . \left(\frac{\theta, M}{\mathfrak{L}_{t-r^*+1}}\right) = +1,$$

Digitized by Google

već i svi ostali simboli karakternoga sustava te jedinice

$$\left(\frac{\theta,\ M}{\mathfrak{L}_{t-r^*}}\right),\ \left(\frac{\theta,\ M}{\mathfrak{L}_{t-r^*-1}}\right),\ \ldots\ldots\ \left(\frac{\theta,\ M}{\mathfrak{L}_1}\right)$$

moraju biti jednaki $+1$.

Broj I možemo pomnožiti produktom nekih između jedinica $E, E', E'', \ldots . E^{(r^*-1)}$ tako, da bude za broj Γ, koji se tim dobije,

$$\left(\frac{\Gamma,\ M}{\mathfrak{L}_t}\right)=+1,\ \left(\frac{\Gamma,\ M}{\mathfrak{L}_{t-1}}\right)=+1,\ \ldots\ \left(\frac{\Gamma,\ M}{\mathfrak{L}_{t-r^*+1}}\right)=+1.$$

Učinimo li to, zvat ćemo

$$\left(\frac{\Gamma,\ M}{\mathfrak{L}_1}\right),\ \left(\frac{\Gamma,\ M}{\mathfrak{L}_2}\right),\ \ldots\ldots\ \left(\frac{\Gamma,\ M}{\mathfrak{L}_r}\right),$$

gdje smo stavili $r=t-r^*$, kvadratnim karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}_1$.

Osim kvadratnoga karakternoga sustava možemo svakomu cijelomu broju tijela k i svakomu idealu tijela K, pridijeliti i bikvadratni karakterni sustav.

Ako je α koji mu drago cio broj u k, zvat ćemo

$$\left\{\frac{\alpha,\ \mu}{\lambda_1}\right\},\ \left\{\frac{\alpha,\ \mu}{\lambda_2}\right\},\ \ldots\ldots\ \left\{\frac{\alpha,\ \mu}{\lambda_t}\right\}$$

bikvadratnim karakternim sustavom broja α, ako nam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_t$ prikazuje sve proste brojeve, koji su kao faktori sadržani u diskriminanti $D_{1,k}$.

Ako je pak nadalje $\mathfrak{J}_1$ ideal tijela K_1, a $\iota = N_{1,k}(\mathfrak{J}_1)$, to je ι cio broj u k. Onda ćemo nazvati, ako se bikvadratni karakterni sustav jedinice i sastoji od samih pozitivnih jedinica $+1$,

$$\left\{\frac{\iota,\ \mu}{\lambda_1}\right\},\ \left\{\frac{\iota,\ \mu}{\lambda_2}\right\},\ \ldots\ldots\ \left\{\frac{\iota,\ \mu}{\lambda_t}\right\}$$

bikvadratnim karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}_1$.

Digitized by Google

Ima li pak među simbolima

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right\},\ \left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_2}\right\},\ \ldots\ \left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_t}\right\}$$

bar jedan, n. pr.

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_t}\right\},$$

kojega je vrijednost $\pm i$, pomnožit ćemo ι prikladnom potencijom jedinice i tako, da za broj ι^*, koji na taj način iziđe, bude

$$\left\{\frac{\iota^*,\ \mu}{\lambda_t}\right\} = +1,$$

i nazvati

$$\left\{\frac{\iota^*,\ \mu}{\lambda_1}\right\},\ \left\{\frac{\iota^*,\ \mu}{\lambda_2}\right\},\ \ldots\ \left\{\frac{\iota^*,\ \mu}{\lambda_{t-1}}\right\}$$

bikvadratnim karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}_1$.

U slučaju, da među simbolima karakternoga sustava jedinice i nema nijednoga, koji bi bio jednak $\pm i$, ali ima takovih, koji su jednaki -1, možemo samo onda govoriti o bikvadratnom karakternom sustavu, ako među navedenim simbolima, kojih je vrijednost -1, ima takav simbol, a to neka bude n. pr.

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_t}\right\},$$

koji se odlikuje tim, da je

$$\left\{\frac{\alpha,\ \mu}{\lambda_t}\right\}$$

za makar koji broj α tijela k jednak $+1$ ili -1. Ako je to tako, možemo $\iota = N_{1,k}(\mathfrak{J}_1)$ pomnožiti sa $+1$ ili -1 tako, da za broj ι^*, koji nam na taj način iziđe, bude

$$\left\{\frac{\iota^*,\ \mu}{\lambda_t}\right\} = +1.$$

Onda ćemo zvati

Digitized by Google

$$\left\{\frac{\iota^*, \mu}{\lambda_1}\right\}, \left\{\frac{\iota^*, \mu}{\lambda_2}\right\}, \ldots \left\{\frac{\iota^*, \mu}{\lambda_{t-1}}\right\}$$

bikvadratnim karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}_1$.

Iz samih definicija simbola, što smo ih u ovom paragrafu postavili, razabiramo neposredno ove činjenice. Ekvivalentni ideali tijela K imaju isti kvadratni karakterni sustav. Ekvivalentni ideali tijela K_1 imaju isti kvadratni i isti bikvadratni karakterni sustav.

Prema tomu je svakomu idealskom razredu tijela K jednoznačno pridijeljen stalan kvadratan, a svakomu idealskom razredu tijela K_1 stalan kvadratan i stalan bikvadratan karakterni sustav.

§ 8.

Razdioba idealskih razreda tjelesa K i K_1 u rodove.

Skup svih idealskih razreda, kojima pripada isti karakterni sustav, zvat ćemo rodom. U tijelu K ima kvadratnih, u tijelu K_1 kvadratnih i bikvadratnih rodova. Jasno je, da uvijek ima idealskih razreda, kojima se karakterni sustav sastoji od samih jedinica $+1$. Skup svih idealskih razreda te vrste tvori rod, koji ćemo zvati glavnim rodom. Svaki rod sadržava istu množinu idealskih razreda.

Da odredimo gornju granicu za broj bikvadratnih rodova, promatrat ćemo dvoličnе idealske razrede $A_{\iota,k}$. Točno poznavanje broja neovisnih dvoličnih idealskih razreda A_k i $A_{1,K}$ dovodi nas i do broja neovisnih idealskih razreda $A_{1,k}$.

Ako označimo sa r_1 broj simbolâ, kojima je pojedini kvadratni rod tijela K određen, to je, kako je poznato, broj neovisnih dvoličnih idealskih razreda A_k jednak $2^{r_1}-1$. Obazremo li se na ono, što je rečeno u § 6., i postupamo li onako, kao gospodin Hilbert u § 19. svoje rasprave: „Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers“, uvjerit ćemo se, da dvolični idealski razredi $A_{1,K}$ čine svezu razredâ od stepena $2^{r_2}-1$, ako sa r_2 bilježimo broj simbolâ, kojima je određen pojedini kvadratni rod tijela K_1.

Dokazat ćemo, da u slučajevima, što ih mi promatramo, stepen razredne sveze, koju tvore dvolični idealski razredi $A_{1,k}$, ne prekoračuje broja $2^{r_1}-1 . 2^{r_2}-1$.

Dvolični idealski razredi $A_{1,k}$ čine komutativnu grupu, pa se stoga dadu prikazati osnovkom, kojoj su elementi djelomice četvrtoga, djelomice drugoga stepena. No budući da je kvadrat dvo-

Digitized by Google

lična idealskoga razreda četvrtoga stepena rečene osnovke dvoličan idealski razred tijela K, moći ćemo idealske razrede $A_{1,k}$ prikazati, i to samo na jedan način, u obliku

$$A_{1,1}^{a_1} A_{1,2}^{a_2} \ldots\ldots A_{1,s}^{a_s} A_1^{b_1} A_2^{b_2} \ldots\ldots A_t^{b_t},$$

gdje eksponenti mogu imati koju od vrijednosti *0* ili *1;* pri tom su $A_1, A_2, \ldots\ldots A_t$ izvjesni dvolični idealski razredi tijela K, a $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots\ldots A_{1,s}$ izvjesni dvolični idealski razredi tijela K_1, koji među svojim idealima ne sadržavaju ideala tijela K, a uz to se odlikuju tim, da produkt

$$A_{1,1}^{a_1} A_{1,2}^{a_2} \ldots\ldots A_{1,s}^{a_s},$$

u kome mogu eksponenti imati koju od vrijednosti *0* ili *1*, ne može drukčije biti jednak idealskomu razredu, koji među svojim idealima sadržava koji ideal tijela K, nego tako, da budu svi eksponenti jednaki *0*.

Iz gornje se prikazbe razabira jasno, da s ne može prekoračiti broja $r_1 - 1$, a t broja $r_2 - 1$. Tim je dokazano, da je ispravna naša tvrdnja, što smo je malo prije izrekli o gornjoj granici stepena razredne sveze, koju tvore idealski razredi $A_{1,k}$.

Tom ćemo se spoznajom poslužiti, da odredimo i za broj bikvadratnih rodova gornju granicu. Uzet ćemo ponajprije, da je μ ostatak 5.—13. grupe ostataka s obzirom na λ^7. Onda možemo pokazati, da brojevi r_1 i r_2 ne nadmašuju broja r, koji nam prikazuje broj simbolâ, kojima je određen pojedini bikvadratni rod.

U slučajevima, o kojima se sada radi, broj prostih brojeva tijela k, koji su sadržani kao faktori u diskriminanti $D_{1,k}$, jednak je broju prostih brojeva tijela k, koji se nalaze u D_k. Označimo ih sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_t$. Onda je jasno, da uvijek, ako je

$$\left\{\frac{i, \mu}{\lambda_1}\right\} = \pm 1, \quad \left\{\frac{i, \mu}{\lambda_2}\right\} = \pm 1, \ldots\ldots \left\{\frac{i, \mu}{\lambda_t}\right\} = \pm 1,$$

mora biti također

$$\left(\frac{i, \mu}{\lambda_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{i, \mu}{\lambda_2}\right) = 1, \ldots\ldots \left(\frac{i, \mu}{\lambda_t}\right) = 1.$$

Digitized by Google

Stoga je u takom slučaju $r = r_1$. No ako među simbolima karakternoga sustava jedinice i ima bar jedan, a to neka bude n. pr.

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right\},$$

koji je jednak $\pm i$, to mora biti

$$\left(\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right) = -1.$$

Kad bi bilo

$$\left(\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right) = +1,$$

dala bi se naći za svaku pozitivnu cijelu racionalnu potenciju λ_1^e prostoga broja λ_1 kongruencija oblika

$$i \equiv N_k\,(A),\ (\lambda_1^e),$$

u kojoj je A cio broj tijela K. Iz te bi kongruencije izlazilo, da mora biti

$$-1 \equiv [N_k\,(A)]^2,\ (\lambda_1^e)$$

ili i dalje

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right\}^2 = 1,$$

a to je protivno pretpostavci. Stoga je i sada $r = r_1$.

I broj prostih ideala tijela K, koji se nalaze u diskriminanti $D_{1,K}$, u slučajevima, koje sada promatramo, jednak je t. Označimo ih sa $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots . \mathfrak{Q}_t$. Zaključit ćemo, kao i prije, da iz

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right\} = \pm 1,\quad \left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_2}\right\} = \pm 1, \ldots . \quad \left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_t}\right\} = \pm 1$$

izlazi $\left(\frac{i,\ \mu}{\mathfrak{Q}_1}\right) = 1,\quad \left(\frac{i,\ \mu}{\mathfrak{Q}_2}\right) = 1, \ldots . \quad \left(\frac{i,\ \mu}{\mathfrak{Q}_t}\right) = 1.$

Ako je pak bar jedan simbol karakternoga sustava jedinice i, a to neka bude n. pr.

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right\},$$

Digitized by Google

jednak $\pm i$, to mora biti

$$\left(\frac{i,\ M}{\mathfrak{L}}\right) = -1,$$

ako sa $\mathfrak{L}$ obilježimo u λ_1 kao faktor sadržan prost ideal tijela K. Poradi pretpostavke mora za svaki pozitivni cijeli racionalni broj e da postoji kongruencija oblika:

$$i \equiv N_{1,K}\ (A_1),\quad (\mathfrak{L}_1^{\,e}),$$

u kojoj je A_1 cio broj tijela K_1. No budući da je $\mathfrak{L}_1$ dvoličan, izlazi iz te kongruencije dalje

$$i \equiv S_1 N_{1,K}\ (A_1),\quad (\mathfrak{L}_1^{\,e}),$$

a obje nam daju

$$-1 \equiv N_{1,K}\ (A_1),\quad (\lambda_1^{\,e}),$$

odakle se zaključuje, da je

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda_1}\right\}^2 = 1,$$

a to nije u skladu s pretpostavkom. Vidi se dakle, da r_2 ne može biti veći od r.

Osim slučajeva, što smo ih baš promotrili, trebat će nam kod istraživanja, koja još hoćemo da provedemo, slučajevi $\mu \equiv 3$, ili $\equiv 3+4i$, (λ^6). Dovoljno je, da se u ta dva slučaja, kao što ćemo poslije vidjeti, ograničimo na tjelesa $k\ (\sqrt[4]{\mu},\ i)$, za koja je μ prost broj tijela k.

Da je u oba slučaja $r = r_1$, vidimo odmah, jer su i rodovi tijela K, a i bikvadratni rodovi tijela K_1 određeni jednim simbolom; ovo posljednje poradi toga, što je

$$\left\{\frac{i,\ \mu}{\lambda}\right\} = -1,\quad \left\{\frac{\alpha,\ \mu}{\lambda}\right\} = \pm 1,\quad \left\{\frac{i,\ \mu}{\mu}\right\} = -1,$$

gdje α predočuje cio broj tijela k.

Treba dakle samo još pokazati, da r_2 nije veći od r.

Promatrajmo tijelo $k\ (\sqrt[4]{\mu},\ i)$, za koje je $\mu \equiv 3$, (λ^6). Za μ te vrste mora biti $\lambda = \mathfrak{L}$ prost ideal u K, a $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1^{\,2}$, gdje nam $\mathfrak{L}_1$

Digitized by Google

predočuje prost ideal tijela K_1. Poradi toga, što je $N_k(\mathfrak{L}) = N_{1,k}(\mathfrak{L}_1)$, mora biti

$$N(\mathfrak{L}) = N_1(\mathfrak{L}_1),$$

ako se pod N i N_1 razumijevaju norme uzete u tjelesima K ili K_1. Stoga je svaki cijeli broj A_1 tijela K_1 kongruentan izvjesnomu cijelom broju A tijela K s obzirom na svaku pozitivnu cijelu racionalnu potenciju ideala $\mathfrak{L}_1$. Treba li dakle da bude

$$i \equiv N_{1,K}(A_1), \quad (\mathfrak{L}^e),$$

možemo naći cijeli broj A tijela K, za koji je

$$A_1 \equiv A, \quad (\mathfrak{L}^e),$$

tako, da iz predzadnje kongruencije izlazi, da je

$$i \equiv A^2, \quad (\mathfrak{L}^e),$$

a to ne može biti. Jer ako uzmemo, da je $A = \alpha + \beta M$, gdje su α i β cijeli brojevi u k, to bi, budući da iz zadnje kongruencije izlazi, da je

$$i \equiv (SA)^2, \quad (\mathfrak{L}^e),$$

moralo biti

$$i \equiv \alpha^2 + \beta^2\mu, \quad (\lambda^{e-2}),$$

no to ne može biti, ako se uzme e dosta velik.

Ako je pak

$$A = \frac{\alpha + \beta M}{\lambda^s},$$

gdje su opet α i β cijeli brojevi tijela k, a s je *1* ili *2*, to bi iz kongruencije $i \equiv A^2$, $(\mathfrak{L}^e)$ izlazilo:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2\mu - \lambda^{2s} i}{2} + \alpha\beta M \equiv 0, \quad (\lambda^{e'}),$$

a tu je opet e' po volji velik pozitivan cio broj. Budući da su α i β prosti prema λ, ne može ta kongruencija postojati, ako je $e' > 2$.

Tim je općeno dokazano, da je u slučaju $\mu \equiv 3$, (λ^6)

Digitized by Google

$$\left(\frac{i,\ M}{\mathfrak{L}}\right) = -1,$$

a tim i istinitost tvrdnje o brojevima r i r_2.

Prijeđimo k slučaju $\mu \equiv 3 + 4i$, (λ^6). I tu ćemo moći dokazati, da je

$$\left(\frac{i,\ M}{\mathfrak{L}}\right) = -1.$$

Već otprije znademo, da se u tom slučaju prosti broj λ raspada u tijelu K u dva različita prosta ideala $\mathfrak{L}$ i $S\mathfrak{L}$ tako, da postoji jednadžba $\lambda = \mathfrak{L}.S\mathfrak{L}$, i da su $\mathfrak{L}$ i $S\mathfrak{L}$ u K_1 kvadrati prostoga ideala $\mathfrak{L}_1$ i $S_1\mathfrak{L}_1$. Stoga je

$$N_1(\mathfrak{L}_1) = n(\lambda),$$

ako su N_1 i n norme uzete u tjelesima K_1 i k. Kad bi bilo

$$\left(\frac{i,\ M}{\mathfrak{L}}\right) = +1,$$

morala bi se za svaki pozitivni cijeli racionalni broj e dati naći kongruencija

$$i \equiv N_{1,K}(A_1), \quad (\mathfrak{L}^e),$$

u kojoj je A_1 cio broj u K_1. No budući da je A_1 kongruentan izvjesnomu broju α tijela k s obzirom na $\mathfrak{L}_1^{\ e}$ prema kongruenciji

$$A \equiv \alpha, \quad (\mathfrak{L}_1^{\ e}),$$

i mali bismo

$$i \equiv \alpha^2, \quad (\lambda^e),$$

a to nije moguće, ako je $e > 1$.

Tim je doduše dokazano, da je

$$\left(\frac{i,\ M}{\mathfrak{L}}\right) = -1,$$

ako je μ prost broj, no budući da diskriminanta $D_{1,k}$ sadržava samo proste faktore λ i μ, dok se u diskriminanti $D_{1,K}$ nalaze tri prosta ideala kao faktori, to iz jednadžbi

Digitized by Google

$$\left(\frac{i,\ \mu}{\lambda}\right) = -1, \quad \left(\frac{\alpha,\ \mu}{\lambda}\right) = \pm 1, \quad \left(\frac{i,\ \mu}{\mu}\right) = -1,$$

gdje je α koji mu drago cio broj u k, još ne izlazi, da r_2 ne premašuje broja r. Da to uzmognemo zaključiti, dokazat ćemo ponajprije, da temeljna jedinica E tijela K ne može biti u isti mah kvadratan normni ostatak obaju prostih ideala $\mathfrak{L}$ i $S\mathfrak{L}$, a isto tako, da ne može biti u isto doba kvadratan normni neostatak tih prostih ideala.

Ako je μ prost broj, mora biti $N_k(\mathrm{E}) = \pm i$. Kad bi bilo $N_k(\mathrm{E}) = \pm 1$, mogli bismo E pomnožiti zgodnom potencijom jedinice i tako, da bude $N_k(\mathrm{E}) = +1$, pa bi se i taj produkt mogao uzeti temeljnom jedinicom tijela K. Stoga možemo već unaprijed uzeti E u tom obliku. Poradi jednadžbe $N_k(\mathrm{E}) = +1$ mora biti u K takav cio broj A, za koji valja jednadžba

$$\mathrm{E} = A^{1-S}.$$

No budući da smo uzeli, da je μ prost broj, ima u tijelu K osim 1 samo još jedan dvolični glavni ideal M tako, da je A ili jednak produktu izvjesne jedinice H u K s izvjesnim brojem α u k ili pak produktu takove jedinice H sa M i izvjesnim brojem α u k. Odatle zaključujemo, da je $\mathrm{E} = \pm \mathrm{H}^{1-S}$, a to se ne slaže s temeljnim svojstvom jedinice E, kako se lako možemo uvjeriti, ako se sjetimo, da se može staviti $\mathrm{H} = \mathrm{E}\rho^{\frac{n}{m}}$, gdje je n cio racionalan broj, a ρ korijen jedinice tijela K.

Kad bi sada bilo

$$\mathrm{E} \equiv N_{1,K}\ (A_1), \quad (\mathfrak{L}^e),$$

izlazila bi i ova kongruencija

$$S\mathrm{E} \equiv N_{1,K}\ (SA_1), \quad (S\mathfrak{L}^e),$$

pa kad bi uz to bilo još i

$$\mathrm{E} \equiv N_{1,K}\ (B_1), \quad (S\mathfrak{L}^e),$$

gdje pod A_1 i B_1 razumijevamo cijele brojeve u K_1, a pod e kojigod pozitivan cio racionalan broj, dobili bismo kongruenciju

Digitized by Google

$$N_k\,(\mathrm{E}) \equiv N_{1,K}\,(B_1 \,.\, SA_1), \quad (S\mathfrak{Q}^e),$$

pa bi $\pm i$ morao biti kvadratan normni ostatak s obzirom na $S\mathfrak{Q}$ ili također s obzirom na $\mathfrak{Q}$, a to ne može biti, kako je već prije dokazano.

No E ne može ni biti u isto doba kvadratan normni neostatak s obzirom na $\mathfrak{Q}$ i $S\mathfrak{Q}$, jer bi iz toga izlazilo, da je i SE kvadratan normni neostatak s obzirom na $\mathfrak{Q}$, te bi $N_k\,(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \,.\, S\mathrm{E}$ moralo biti kvadratan normni ostatak.

Sjetimo li se sada, kako se dobiva kvadratni karakterni sustav kojega ideala u K_1, brzo ćemo se uvjeriti, da i u tom zadnjem slučaju r_2 ne može premašiti broja r. U tijelu K nalazimo jedinicu i, za koju je

$$\left(\frac{i,\, M}{\mathfrak{Q}}\right) = -1;$$

među jedinicama H toga tijela, za koje je

$$\left(\frac{\mathrm{H},\, M}{\mathfrak{Q}}\right) = +1,$$

sigurno je jedinica E ili iE, ali poradi toga je E ili iE normni neostatak s obzirom na $S\mathfrak{Q}$ tako, da je i r i r_2 jednako 1.

Vidimo dakle, da za brojeve μ, što smo ih u ovom paragrafu promatrali, stepen razredne sveze, koju tvore dvolični idealski razredi $A_{1,k}$, ne prekoračuje broja 4^{r-1}.

Na temelju te spoznaje lako ćemo naći gornju granicu za broj bikvadratnih rodova tijela K_1. Ponajprije je jasno, da je $(1-S_1)^{\text{ta}}$ simbolična potencija svakoga idealskoga razreda u K_1 idealski razred glavnoga roda. Neka bude f broj onih idealskih razreda glavnoga roda, koji su $(1-S_1)^{\text{te}}$ simbolične potencije idealskih razreda. Označit ćemo sa $P_1, P_2, \ldots . P_f$ te idealske razrede tako, da je $P_1 = G_1^{1-S_1}$, $P_2 = G_2^{1-S_1}, \ldots . P_f = G_f^{1-S_1}$, gdje su $G_1, G_2, \ldots . G_f$ stalni idealski razredi u K_1. Uzmemo li makar koji idealski razred C tijela K_1, to pripada C^{1-S_1} glavnomu rodu, te je n. pr. $C^{1-S_1} = P_i$ ili $C^{1-S_1} = G_i^{1-S_1}$, a odatle izlazi, da je $(CG_i^{-1})^{1-S_1} = 1$. Dakle je CG_i^{-1} dvoličan idealski razred $A_{1,k}$ u K_1, te možemo staviti $C = A_{1,k}\, G_i$. Stoga ćemo dobiti

Digitized by Google

sve idealske razrede tijela K_1, ako u produktu $A_{1,k}\, G_i$ uzmemo za G_i svih f razreda $G_1, G_2, \ldots . G_f$, a za $A_{1,k}$ svaki dvolični idealski razred tijela K_1. Svi su idealski razredi, što ih na taj način dobivamo, među sobom različiti. Ako broj među sobom različitih dvoličnih ideala $A_{1,k}$ obilježimo sa a, to je broj svih među sobom različnih idealskih razreda u K_1 jednak af. Ima li pak u K_1 g rodova, a svaki sadržava f_1 idealskih razreda, to je broj idealskih razreda u K_1 također jednak gf_1 tako, te možemo napisati, da je $gf_1 = af$. No svakako je $f \leqq f_1$, a poradi toga i $g \leqq a$ ili, ako se poslužimo prije dobivenim resultatom, $g \leqq 4^{r-1}$; samo treba da je μ od onih brojeva, što smo ih prije istražili.

§ 9.

Bikvadratni zakon recipročnosti za proste brojeve prve vrste.

Za bikvadratni karakter jedinice i s obzirom na broj μ tijela k valja jednadžba

$$\left\{\frac{i}{\mu}\right\} = i^{\frac{n(\mu)-1}{4}},$$

u kojoj je $n(\mu)$ norma broja μ uzeta u tijelu k.

Stavimo li $\mu \equiv (a, b, c)$, (λ^7), to je

$$n(\mu) \equiv (-3)^b, \quad (16),$$

a prema tomu

$$\frac{n(\mu)-1}{4} \equiv -b, \quad (4).$$

Postoji dakle snošaj

$$(1) \qquad \left\{\frac{i}{\mu}\right\} = i^{-b}.$$

Po vrijednosti toga bikvadratnoga karaktera razdijelit ćemo proste brojeve tijela k na tri vrste. U prvu vrstu neka pripadaju oni prosti brojevi π, za koje je

$$\left\{\frac{i}{\pi}\right\} = \pm i;$$

Digitized by Google

u drugu vrstu oni prosti brojevi $\varkappa_1$, za koje je

$$\left\{\frac{i}{\varkappa_1}\right\} = -1,$$

a u treću vrstu prosti brojevi $\varkappa_2$, za koje je

$$\left\{\frac{i}{\varkappa_2}\right\} = +1.$$

Proste ćemo brojeve druge vrste uzimati u obliku 15., a proste brojeve treće vrste u obliku 13. grupe ostataka s obzirom na λ^7.

Najlakše se bikvadratni zakon recipročnosti nađe za dva prosta broja π i π_1 prve vrste. Ako je naime π_1 prost broj prve vrste, dade se uvijek naći zgodna potencija i^t jedinice i tako, da bude

$$\left\{\frac{i^t\pi}{\pi_1}\right\} = 1. \tag{2}$$

S toga je π_1 u tijelu $k(\sqrt[4]{i^t\pi}, i)$ norma $N_{1,k}$ stalnoga prostoga ideala $\mathfrak{P}_1$ toga tijela. Relativna diskriminanta $D_{1,k}$ sadržava samo proste brojeve λ i π kao faktore. Dakle se sastoji bikvadratni karakterni sustav broja π_1 u tijelu $k(\sqrt[4]{i^t\pi}, i)$ od dva simbola:

$$\left\{\frac{\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right\}, \quad \left\{\frac{\pi_1, i^t\pi}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\}.$$

No budući da smo uzeli, da je i π prost broj prve vrste, možemo opet odrediti zgodnu potenciju i^{t_1} tako, da bude

$$\left\{\frac{i^{t_1}\pi_1}{\pi}\right\} = 1. \tag{3}$$

S toga sadržava karakterni sustav ideala $\mathfrak{P}_1$ samo simbol

$$\left\{\frac{i^{t_1}\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right\}.$$

Prije smo našli, da je za stalna tjelesa, među koja tijelo $k(\sqrt[4]{i^t\pi}, i)$ pripada, broj rodova $g \leqq 4^{r-1}$. U našem je slučaju $r = 1$, te tijelo

Digitized by Google

k $(\sqrt[4]{i^t\pi},\ i)$ sadržava prema tomu samo jedan rod: glavni rod. Stoga mora biti

$$\left\{\frac{i^{t_1}\pi_1,\ i^t\pi}{\lambda}\right\} = 1.$$

Tu jednadžbu možemo i ovako napisati:

$$(4) \qquad \left\{\frac{i,\ i}{\lambda}\right\}^{tt_1} \left\{\frac{i,\ \pi}{\lambda}\right\}^{t_1} \left\{\frac{\pi,\ i}{\lambda}\right\}^{t} \left\{\frac{\pi_1,\ \pi}{\lambda}\right\} = 1.$$

Obazremo li se sada na jednadžbe

$$\left\{\frac{i,\ i}{\lambda}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{i,\ \pi}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\pi,\ i}{\lambda}\right\} = 1;$$

$$\left\{\frac{\pi,\ i}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{i}{\pi}\right\}, \quad \left\{\frac{\pi_1,\ i}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{i}{\pi_1}\right\},$$

od kojih prva izlazi neposredno iz definicije simbola, druga poradi jednadžbe (1) § 4., a ostale iz definicije simbola, ako još primijenimo jednadžbu (1) ovoga paragrafa, pa ako se uz to osvrnemo na jednadžbe (2) i (3), koje i ovako napisati možemo:

$$\left\{\frac{i}{\pi_1}\right\}^t = \left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\}^{-1}, \quad \left\{\frac{i}{\pi}\right\}^{t_1} \left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\}^{-1},$$

dobit ćemo iz jednadžbe (4) za proste brojeve π i π_1 bikvadratni zakon recipročnosti u obliku:

$$(5) \qquad \left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\} = \left\{\frac{\pi_1,\ \pi}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\}.$$

Ako se u tu jednadžbu za $\left\{\frac{\pi_1,\ \pi}{\lambda}\right\}$ uvede vrijednost prema § 4., dobit će ona oblik:

$$(5^*) \qquad \left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\} = i^{a_1b - ab_1 + 2bb_1}\left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\};$$

pri tom je $\pi \equiv (a,\ b,\ c)$, $\pi_1 \equiv (a_1,\ b_1,\ c_1)$, $(\lambda^7.)$

Digitized by Google

Bikvadratni zakon recipročnosti, kako nam ga izražava jednadžba (5) za proste brojeve π, π_1 prve vrste, vrijedi u istom obliku sasvim općeno za makar koje proste brojeve tijela k, kako ćemo se postepeno uvjeriti.

§ 10.

Neki posebni slučajevi bikvadratnoga zakona recipročnosti.

Neka bude $\varkappa_1$ prost broj druge vrste, a π makar koji prost broj. Uzet ćemo, da je $\left\{\frac{\varkappa_1}{\pi}\right\} = 1$. Onda je π u tijelu $k\,(\sqrt[4]{\varkappa_1},\ i)$ relativna norma $N_{1,k}$ izvjesnoga ideala $\mathfrak{P}_1$ toga tijela. Karakterni se sustav broja π sastoji od simbola

$$\left\{\frac{\pi, \varkappa_1}{\lambda}\right\},\ \left\{\frac{\pi, \varkappa_1}{\varkappa_1}\right\} = \left\{\frac{\pi}{\varkappa_1}\right\},$$

jer su λ i $\varkappa_1$ jedini prosti brojevi u k, koji se nalaze u diskriminanti $D_{1,k}$. Poradi pretpostavke o broju $\varkappa_1$ dade se naći potencija i^t jedinice i tako, da bude

$$\left\{\frac{i^t\pi,\ \varkappa_1}{\lambda}\right\} = 1, \tag{1}$$

a odatle izlazi, da se karakterni sustav ideala $\mathfrak{P}_1$ sastoji od jedinoga simbola

$$\left\{\frac{i^t\pi,\ \varkappa_1}{\varkappa_1}\right\} = \left\{\frac{i^t\pi}{\varkappa_1}\right\}.$$

Kao što smo zaključili u predašnjem paragrafu, zaključit ćemo i sada, da mora biti

$$\left\{\frac{i^t\pi,\ \varkappa_1}{\varkappa_1}\right\} - \left\{\frac{i^t\pi}{\varkappa_1}\right\} = 1. \tag{2}$$

Treba samo još odrediti eksponent t.

Ako napišemo jednadžbu (1) u obliku:

$$\left\{\frac{i,\ \varkappa_1}{\lambda}\right\}^t \left\{\frac{\pi,\ \varkappa_1}{\lambda}\right\} = 1,$$

Digitized by Google

pa ako se onda obazremo na jednadžbe:

$$\left\{\frac{i,\ \varkappa_1}{\lambda}\right\} = -1, \quad \left\{\frac{\pi,\ \varkappa_1}{\lambda}\right\} = (-1)^{a+b},$$

ako je $\pi \equiv (a,\ b,\ c)$, (λ^7), dobit ćemo za t jednadžbu:

$$t \equiv a + b, \quad (2).$$

Uvrstimo li to u (2), dobit ćemo, budući da je

$$\left\{\frac{i}{\varkappa_1}\right\} = -1,$$

ovu jednadžbu:

$$(-1)^{a+b}\left\{\frac{\pi}{\varkappa_1}\right\} = \left\{\frac{\pi,\ \varkappa_1}{\lambda}\right\}\left\{\frac{\pi}{\varkappa_1}\right\} = 1.$$

Istu bismo jednadžbu dobili iz jednadžbe (5) predašnjega paragrafa.

Neka bude nadalje $\varkappa_2$ prost broj treće vrste, a π makar koji prost broj. Uzmemo li, da je

$$\left\{\frac{\varkappa_2}{\pi}\right\} = 1,$$

moći ćemo sada dokazati, da je i

$$\left\{\frac{\pi}{\varkappa_2}\right\} = 1.$$

Poradi prve je jednadžbe π u tijelu $k(\sqrt[4]{\varkappa_2},\ i)$ norma $N_{1,k}$ izvjesnoga ideala $\mathfrak{P}_1$ toga tijela. Budući da diskriminanta $D_{1,k}$ u ovom slučaju sadržava samo prosti broj $\varkappa_2$ kao faktor, sastoji se karakterni sustav broja π od jednoga simbola

$$\left\{\frac{\pi,\ \varkappa_2}{\varkappa_2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{\varkappa_2}\right\},$$

ali i karakterni sustav ideala $\mathfrak{P}_1$, jer je

$$\left\{\frac{i,\ \varkappa_2}{\lambda}\right\} = 1.$$

Taj simbol mora dakle biti jednak $+1$, kao što smo gore ustvrdili.

Digitized by Google

§ 11.

Prosti ideali tijela k s propisanim bikvadratnim karakterima.

Poznato je, da je

$$\underset{s=1}{\overset{L}{\Pi}} \underset{(\pi)}{\Pi} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) n(\pi)^{-s}},$$

gdje je α makar koji cio broj tijela k, a π prolazi sve proste brojeve u k, konačan i različit od 0. Odatle se može također zaključiti, da je izraz

$$\underset{s=1}{\overset{L}{\sum}} \underset{(\pi)}{\sum} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \frac{1}{n(\pi)^s}$$

konačan i različit od 0.

Ta je činjenica od bitne važnosti za dokaz, da ima beskonačno mnogo prostih brojeva π sa propisanim kvadratnim karakterima.

Hoćemo li da dokažemo, da se k svakomu sustavu $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_t$ cijelih brojeva u k, koji se ističe tim, da nije nijedan produkt tih brojeva jednak četvrtoj potenciji cijeloga broja, ako su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_t$ makar koje cijele potencije jedinice i, dade naći beskonačan broj prostih brojeva π, koji zadovoljavaju jednadžbe:

$$\left\{\frac{\alpha_1}{\pi}\right\} = \varepsilon_1, \quad \left\{\frac{\alpha_2}{\pi}\right\} = \varepsilon_2 \ldots\ldots \left\{\frac{\alpha_t}{\pi}\right\} = \varepsilon_t,$$

treba promatrati izraz

$$\underset{s=1}{\overset{L}{\Pi}} \underset{(\pi)}{\Pi} \frac{1}{1-\left\{\frac{\alpha}{\pi}\right\} n(\pi)^{-s}}$$

i pokazati, da je konačan i različit od 0.

Da to pokažemo, poslužit nam se valja činjenicom, da izraz

$$\zeta(s) = \underset{(j)}{\Sigma} \frac{1}{n(j)^s} = \underset{(\mathfrak{p})}{\Pi} \frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}},$$

Digitized by Google

u kom treba j da prođe sve ideale kojega tijela ili $\mathfrak{p}$ sve proste ideale istoga tijela, konvergira za realne vrijednosti $s>1$, a za $s=1$ da raste preko svih granica, no ipak tako, da je

$$\lim_{s=1}\left\{(s-1)\zeta(s)\right\}$$

konačan i različit od 0.

Prema tomu konvergira svakako i izraz

$$\zeta'_{K_1}(s)=\prod'_{(\mathfrak{P}_1)}\frac{1}{1-N(\mathfrak{P}_1)^{-s}},$$

u kom $\mathfrak{P}_1$ ima da prođe sve proste ideale tijela K_1, koji nijesu sadržani u λ, a $N(\mathfrak{P}_1)$ predočuje normu uzetu u tijelu K_1, za realne vrijednosti $s>1$, a

$$\lim_{s=1}\left\{(s-1)\zeta'_{K_1}(s)\right\}$$

jest konačan i različit od 0.

Promotrimo izraz u $\zeta'_{K_1}(s)$, koji potječe od stalnoga prostoga broja π tijela k. Lako ćemo se uvjeriti, da taj izraz ima poradi § 3. jednu od ovih četiriju vrijednosti:

$$\frac{1}{[1-n(\pi)^{-s}]^4},\quad \frac{1}{[1-n(\pi)^{-2s}]^2},\quad \frac{1}{1-n(\pi)^{-s}},\quad \frac{1}{1-n(\pi)^{-4s}}$$

prema tomu, da li je $\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\}$ jednako

$$1,\ -1,\ 0,\quad \text{ili}\quad \pm i.$$

Ta se četiri izraza dadu prikazati jedinstveno u obliku

$$\frac{1}{1-n(\pi)^{-s}}\prod_{(m)}\frac{1}{1-\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\}^m n(\pi)^{-s}},\quad (m=1,2,3).$$

Stoga možemo za $\zeta'_{K_1}(s)$ napisati jednadžbu:

Digitized by Google

$$\zeta'_{K_1}(s) = \prod'_{(\pi)} \frac{1}{1-n(\pi)^{-s}} \prod'_{(\pi)} \prod_{(m)} \frac{1}{1-\left\{\frac{\mu}{\pi}\right\}^m n(\pi)^{-s}},$$

gdje crtica ′ ima da pokaže, da je λ isključen.

Odatle poradi onoga, što smo malo prije kazali o izrazima $\zeta(s)$ i $\zeta_{K_1}(s)$, izlazi, da je dvostruki produkt za $s=1$ konačan i različit od 0. Isto vrijedi dakako još i onda, ako se prosti broj λ ne isključi.

Na temelju toga poučka možemo dokazati spomenuti poučak o prostim brojevima s prostim bikvadratnim karakterima po Hilbertovoj metodi[1], samo se treba uz to još poslužiti činjenicom, da je

$$\lim_{s=1} \sum_{(\pi)} \left(\frac{\mu}{\pi}\right) \frac{1}{n(\pi)^s}$$

konačan i različit od 0.

§ 12.

Zakon recipročnosti za dva prosta broja, koji ne pripadaju oba k prvoj vrsti.

Kod dokaza ovoga paragrafa uzimamo, da je poznat Eisensteinov zakon recipročnosti među racionalnim i kompleksnim prostim brojem. Ako p i q znače dva racionalna prosta broja, od kojih je prvi oblika $p \equiv 1$, (4), a drugi oblika $q \equiv 3$, (4), a π makar koji kompleksan prost broj oblika $\pi \equiv \pm 1$, (4) ili $\equiv \pm 1 + 2i$, (4), postoje snošaji:

$$(1) \qquad \left\{\frac{p}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\pi}{p}\right\}, \quad \left\{\frac{-q}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\pi}{q}\right\}. \qquad (1^*)$$

Mi ćemo se poslužiti samo prvom od tih jednadžbi. Prosti broj π pripada, kako vidimo, u jednu od četiri grupe ostataka s obzirom na λ^7, u 9., 10., 11. ili 12. No jasno je, da se može svaki prost broj prve vrste pomnožiti izvjesnom potencijom jedinice i, da prijeđe među ostatke navedenih četiriju grupa. Kako je to učinjeno, možemo na preobličeni broj π primijeniti jednadžbu (1).

[1] Mathem. Ann. LI, § 13., strana 23.

Digitized by Google

Uzmimo, da su $\varkappa$ i $\varkappa_1$ dva dvočlana prosta broja druge ili treće vrste. Pokazasmo već u § 10., da iz jednadžbe:

$$\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right\} = 1$$

izlazi druga jednadžba:

$$\left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right\} = 1.$$

Sada neka bude

$$\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right\} = i.$$

Prema onomu, što smo razvili u predašnjem paragrafu, moći ćemo odrediti prosti broj ρ tako, da budu zadovoljene ove jednadžbe:

$$(2) \qquad \left\{\frac{i}{\rho}\right\} = i, \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{\varkappa'}{\rho}\right\} = 1;$$
$$\left\{\frac{\varkappa_1}{\rho}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{\varkappa_1'}{\rho}\right\} = 1;$$

sa $\varkappa'$ i $\varkappa'_1$ označismo proste brojeve konjugirane sa $\varkappa$ i $\varkappa_1$.

Poradi prve od tih jednadžbi pripada prosti broj ρ k prvoj vrsti, pa ga možemo uzeti tako, da bude:

$$(2^*) \qquad \rho \equiv (3, 3, c), \quad (\lambda^7).$$

Iz (2) izlaze neposredno jednadžbe:

$$\left\{\frac{\varkappa\varkappa'}{\rho}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\rho}\right\} = -i;$$

tu su $\varkappa\varkappa'$, $\varkappa_1\varkappa_1'$ racionalni prosti brojevi oblika $p \equiv 1, (4)$. Da uzmognemo primijeniti na te jednadžbe jednadžbu (1), treba pomnožiti ρ n. pr. sa i. Učinimo li to, dobit ćemo iz zadnjih jednadžbi ove:

$$\left\{\frac{\varkappa\varkappa'}{\rho}\right\} = \left\{\frac{i\rho}{\varkappa\varkappa'}\right\}, \quad \left\{\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\rho}\right\} = \left\{\frac{i\rho}{\varkappa_1\varkappa'_1}\right\}.$$

Osvrnemo li se pak na to, da su $\varkappa$ i $\varkappa_1$ prosti brojevi druge ili treće vrste, poradi čega je

Digitized by Google

$$\left\{\frac{i}{xx'}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{i}{x_1 x_1'}\right\} = 1,$$

dobit ćemo jednadžbe:

$$\left\{\frac{xx'}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\rho}{x}\right\}\left\{\frac{\rho}{x'}\right\}, \quad \left\{\frac{x_1 x_1'}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\rho}{x_1}\right\}\left\{\frac{\rho}{x_1'}\right\}.$$

Ali iz (2), ako se poslužimo onim, što je rečeno u § 10., jer je ρ uzet u obliku (2*), izlazi:

$$\left\{\frac{\rho}{x'}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{\rho}{x_1'}\right\} = 1.$$

Stoga izlaze konačno jednadžbe:

$$(3) \qquad \left\{\frac{x}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\rho}{x}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{x_1}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\rho}{x_1}\right\} = -i.$$

Promotrimo sada tijelo $k(\sqrt[4]{x\rho}, i)$. Poradi pretpostavke o brojevima x i ρ ima $x\rho$ jedan od oblika:

$$x\rho \equiv (1, 1, c) \text{ ili } (3, 3, c). \quad (\lambda^7),$$

a stoga je

$$\left\{\frac{i, x\rho}{\lambda}\right\} = \mp i$$

prema tomu, da li je x druge ili treće vrste. Relativna diskriminanta $D_{1:k}$ tijela $k(\sqrt[4]{x\rho}, i)$ sadržava proste brojeve λ, x, ρ kao faktore tako, da se karakterni sustav broja ρ sastoji od ova tri simbola:

$$\left\{\frac{\rho, x\rho}{\lambda}\right\}, \quad \left\{\frac{\rho, x\rho}{x}\right\} = \left\{\frac{\rho}{x}\right\}, \quad \left\{\frac{x\rho, x\rho}{\rho}\right\} = \left\{\frac{-x}{\rho}\right\}^{-1}.$$

Budući da je ρ sadržan u $D_{1,k}$, mora u tijelu $k(\sqrt[4]{x\rho}, i)$ biti jednak četvrtoj potenciji prostoga ideala $\mathfrak{R}_1$ toga tijela. Da nađemo karakterni sustav ideala $\mathfrak{R}_1$, treba samo da se obazremo na to, da je

$$\left\{\frac{\rho, x\rho}{\lambda}\right\} = -1,$$

Digitized by Google

i da poradi toga pomnožimo ρ sa -1 tako, da iziđe:

$$\left\{\frac{-\rho,\ \varkappa\rho}{\lambda}\right\} = +1.$$

Onda se dobije karakterni sustav ideala $\mathfrak{R}_1$ u obliku:

$$(5) \qquad \left\{\frac{-\rho}{\varkappa}\right\} = \left\{\frac{\rho}{\varkappa}\right\},\ \left\{\frac{-\rho,\ \varkappa\rho}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\}^{-1}$$

Iz jednadžbe (3) vidi se, da ideali $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_1^3$, $\mathfrak{R}_1^4$ pripadaju k različitim rodovima. Osim tih rodova nema u tijelu $k\,(\sqrt[4]{\varkappa\rho},\ i)$ drugih rodova. Iz jednadžbi (3) i (5) spoznajemo nadalje, da je produkt karakterâ svakoga roda toga tijela jednak 1. Iz toga izlazi, da je produkt karakterâ karakternoga sustava svakoga ideala tijela $k\,(\sqrt[4]{\varkappa\rho},\ i)$ jednak 1.

No postoji jednadžba

$$(6) \qquad \left\{\frac{\varkappa\rho}{\varkappa_1}\right\} = 1,$$

pa je poradi toga $\varkappa_1$ u tijelu $k\,(\sqrt[4]{\varkappa\rho},\ i)$ norma stalnoga ideala $\mathfrak{R}_1$. Karakterni sustav broja $\varkappa_1$ sadržava ove simbole:

$$\left\{\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\rho}{\lambda}\right\},\ \left\{\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\rho}{\varkappa}\right\} = \left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right\},\ \left\{\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\rho}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\varkappa_1}{\rho}\right\}.$$

Poradi pretpostavke o brojevima $\varkappa$, $\varkappa_1$ i ρ jest

$$\left\{\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\rho}{\lambda}\right\} = 1,$$

pa se stoga, što je

$$\left\{\frac{i,\ \varkappa\rho}{\lambda}\right\} = \pm i,$$

sastoji karakterni sustav ideala $\mathfrak{R}_1$ od simbola:

$$\left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right\},\ \left\{\frac{\varkappa_1}{\rho}\right\}.$$

Digitized by Google

Produkt tih simbola mora biti prema onome, što smo malo prije pokazali, jednak *1* tako, te možemo napisati jednadžbu:

$$\left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right\}\left\{\frac{\varkappa_1}{\rho}\right\} = 1.$$

Isporedimo li tu jednadžbu s jednadžbom (6), pa obazremo li se uz to još na drugu od jednadžbi (3), dobit ćemo napokon, da je:

$$\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right\} = \left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right\}, \tag{7}$$

kao što izlazi i iz jednadžbe (5) § 9.

Da smo isprva uzeli, da je

$$\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right\} = -i,$$

bili bismo došli do iste jednadžbe (7). Samo bismo bili morali u (2) odrediti prosti broj ρ tako, da bi bio

$$\left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = i, \quad \left\{\frac{\varkappa_1}{\rho}\right\} = i.$$

Iz toga se već samo po sebi vidi, da iz jednadžbe

$$\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right\} = -1$$

izlazi jednadžba

$$\left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right\} = -1,$$

jer bi svaka druga jednadžba bila u protivurječju sa već dobivenim resultatom.

Još nam samo ostaje da promotrimo slučaj, u kom je $\varkappa$ dvočlan prost broj druge ili treće vrste, a π prost broj prve vrste.

Ako stavimo

$$\pi \equiv (a, b, c), \quad (\lambda^7),$$

možemo uzeti, da je $a + b = 4$. Onda spoznajemo po onom, što je razvijeno u § 10., da iz pretpostavke

Digitized by Google

$$\left\{\frac{\varkappa}{\pi}\right\} = 1$$

uvijek izlazi

$$\left\{\frac{\pi}{\varkappa}\right\} = 1.$$

Uzmimo sada, da je

$$\left\{\frac{\varkappa}{\pi}\right\} = i,$$

pa odredimo isto onako, kao što smo učinili u predašnjem slučaju, prosti broj ρ tako, da budu zadovoljene jednadžbe:

$$\left\{\frac{i}{\rho}\right\} = i, \quad \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{\varkappa'}{\rho}\right\} = 1;$$

$$\left\{\frac{\pi}{\rho}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{\pi'}{\rho}\right\} = 1;$$

$\varkappa'$, π' jesu prema $\varkappa$, π konjugirani brojevi. Opet možemo uzeti, da je ρ ovoga oblika:

$$\rho \equiv (3, 3, c), \quad (\lambda^7).$$

Budući da je

$$\left\{\frac{\pi'}{\rho}\right\} = 1,$$

izlazi poradi pretpostavke o brojevima π i ρ, jer su i π' i ρ prosti brojevi prve vrste, iz jednadžbe (5) § 9., da je

$$\left\{\frac{\rho}{\pi'}\right\} = -1,$$

jer ako stavimo

$$\pi' \equiv (a', b', c'), \quad (\lambda^7),$$

onda je $a' = b'$.

Sada treba učiniti isto onakove zaključke, kao što smo ih učinili u predašnjem slučaju, samo treba mjesto $\varkappa_1$ uzeti π. Naći ćemo, ako se osvrnemo na to, da je

$$\left\{\frac{i}{\pi\pi'}\right\} = -1$$

Digitized by Google

mjesto jednadžbi (3) ove jednadžbe:

$$(7) \qquad \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\rho}{\varkappa}\right\} = -i, \quad \left\{\frac{\pi}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\rho}{\pi}\right\} = -i.$$

Baš kao u predašnjem slučaju, naći ćemo i sada, da tijelo $k\ (\sqrt[i]{\varkappa\rho},\ i)$ sadržava četiri različita roda i da je produkt simbolâ, koji nam određuju pojedini rod, jednak *1*.

Poradi jednadžbe:

$$\left\{\frac{\varkappa\rho}{\pi}\right\} = 1$$

π je u tijelu $k\ (\sqrt[i]{\varkappa\rho},\ i)$ norma $N_{1,k}$ prostoga ideala $\mathfrak{P}_1$ toga tijela. Promotrimo li karakterni sustav toga ideala $\mathfrak{P}_1$, to ćemo, budući da je

$$\left\{\frac{\pi,\ \varkappa\rho}{\lambda}\right\} = 1,$$

doći do jednadžbe:

$$\left\{\frac{\pi}{\varkappa}\right\}\left\{\frac{\pi}{\rho}\right\} = 1.$$

Isporedit ćemo tu jednadžbu s jednadžbom

$$\left\{\frac{\varkappa\rho}{\pi}\right\} = 1$$

i s drugom od jednadžbi (7), te ćemo konačno izvesti jednadžbu:

$$(8) \qquad \left\{\frac{\varkappa}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\pi}{\varkappa}\right\}.$$

Isti snošaj izlazi, ako se uzme, da je

$$\left\{\frac{\varkappa}{\pi}\right\} = -i,$$

kako se lako možemo uvjeriti. Ako je pak

$$\left\{\frac{\varkappa}{\pi}\right\} = -1,$$

zaključit ćemo poradi toga, što je

Digitized by Google

$$\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right),$$

da mora biti

$$\left\{\frac{\pi}{\varkappa}\right\}=\pm 1.$$

Kad bi bilo

$$\left\{\frac{\pi}{\varkappa}\right\}=+1,$$

izlazilo bi po § 10., da je i

$$\left\{\frac{\varkappa}{\pi}\right\}=+1$$

protiv pretpostavke. Tako spoznajemo, da je jednadžba (8) valjana u svakom slučaju, dok vrijede pretpostavke o brojevima $\varkappa$ i π. Ta se jednadžba i opet slaže s jednadžbom (5) § 9. za ovaj posebni slučaj. Isto ćemo se tako uvjeriti, da se jednadžba (8), ako π nema uzeti oblik, mora nadomjestiti jednadžbom (5) § 9.

Dosadašnjim smo se razmatranjem uvjerili, da jednadžba (5) § 9. izražava bikvadratni zakon recipročnosti među kompleksnim prostim brojevima makar koje od tri vrste, samo ako se kompleksni prosti brojevi druge vrste uzmu u obliku ostataka 15. grupe s obzirom na λ^7, a kompleksni prosti brojevi treće vrste u obliku 13. grupe ostataka s obzirom na λ^7. No jednadžba nam (5) § 9. još i onda prikazuje bikvadratni zakon recipročnosti, ako se kompleksni prosti brojevi druge i treće vrste uzmu u kojem mu drago obliku, o čem se možemo lako uvjeriti. Isto se tako mora jednadžba (1*), u kojoj je q racionalan broj, nadomjestiti jednadžbom (5) § 9., da bude valjana za makar koji jednočlan i makar koji dvočlan prost broj. Jednadžba (5) § 9. vrijedi napokon i za dva jednočlana prosta broja.

§ 13.

Dopunidbeni zakon bikvadratnomu zakonu recipročnosti.

U ovom ćemo paragrafu dokazati ovaj zakon:

Ako je $\pi \equiv (a, b, c)$, (λ^7) prost broj u tijelu k, postoji uvijek jednadžba:

Digitized by Google

$$(1) \qquad \left\{\frac{\lambda}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\pi, \lambda}{\lambda}\right\}^{-1} = i^{-(b+c)}.$$

Zakon izražen tom jednadžbom zvat ćemo dopunidbenim zakonom bikvadratnomu zakonu recipročnosti.

Neka bude ponajprije π prost broj prve vrste. Onda se može odrediti prikladna potencija i^s broja i tako, da bude:

$$(2) \qquad \left\{\frac{i^s\lambda}{\pi}\right\} = 1.$$

Poradi te jednadžbe raspada se π u tijelu $k\,(\sqrt[4]{i^s\lambda},\ i)$ na četiri različita prosta ideala. Relativna diskriminanta $D_{1,k}$ tijela $k\,(\sqrt[4]{i^s\lambda},\ i)$ sadržava samo prosti broj λ kao faktor. U tijelu $k\,(\sqrt[4]{i^s\lambda},\ i)$ jest i bikvadratan normni ostatak s obzirom na λ tako, da se karakterni sustav prostoga ideala $\mathfrak{P}_1$, koji se sadržava u π, sastoji iz jedinoga simbola

$$\left\{\frac{\pi, i^s\lambda}{\lambda}\right\}.$$

Stoga pripadaju svi idealski razredi u K_1 glavnomu rodu, te mora biti

$$\left\{\frac{\pi, i^s\lambda}{\lambda}\right\} = 1.$$

Osvrnemo li se sada na jednadžbu (2) § 4., dobit ćemo poradi toga, što je

$$\left\{\frac{\pi, i}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{i}{\pi}\right\},$$

i poradi jednadžbe (2) ovoga paragrafa jednadžbu ovoga oblika:

$$\left\{\frac{\pi, \lambda}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\lambda}{\pi}\right\}^{-1}.$$

Neka bude nadalje $\varkappa$ prost broj treće vrste. Onda iz jednadžbe

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = 1,$$

budući da tijelo $k\,(\sqrt[4]{\lambda},\ i)$ samo jedan rod sadržava, a

Digitized by Google

$$\left\{\frac{i}{\varkappa}\right\} = 1,$$

izlazi:

$$\left\{\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right\} = 1,$$

kako i mora da bude po dopunidbenom zakonu.

Ako je pak

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = i,$$

odredit ćemo prost broj ρ prema jednadžbama:

$$\left\{\frac{i}{\rho}\right\} = i, \quad \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = -i,$$

što je moguće. Onda je po bikvadratnom zakonu recipročnosti

$$\left\{\frac{\rho}{\varkappa}\right\} = -i,$$

a stoga

$$\left\{\frac{\lambda\rho}{\varkappa}\right\} = 1.$$

Relativna diskriminanta D_{1k} tijela $K_1 = k(\sqrt[4]{\lambda\rho}, i)$ sadržava u sebi proste brojeve λ i ρ kao faktore. No budući da je

$$\left\{\frac{i, \lambda\rho}{\rho}\right\} = \left\{\frac{i}{\rho}\right\} = i,$$

tvore idealski razredi u K_1 samo jedan rod. Prosti je broj $\varkappa$ u K_1 norma $N_{1,k}$ izvjesnoga prostoga ideala $\mathfrak{R}_1$. Karakterni sustav ideala $\mathfrak{R}_1$ glasi:

$$\left\{\frac{i\varkappa, \lambda\rho}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{i\varkappa}{\rho}\right\} = 1.$$

Iz te jednačbe izvodimo nadalje:

$$\left\{\frac{i, \lambda}{\lambda}\right\} \left\{\frac{i, \rho}{\lambda}\right\}^{-1} \left\{\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right\} \left\{\frac{\varkappa, \rho}{\lambda}\right\}^{-1} = 1.$$

No budući da je

Digitized by Google

$$\left\{\frac{i, \lambda}{\lambda}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{\varkappa, \rho}{\lambda}\right\} = 1,$$

izlazi odatle jednadžba:

$$\left\{\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{i, \rho}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\rho, i}{\lambda}\right\}^{-1} = \left\{\frac{i}{\rho}\right\}^{-1} = \left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\}^{-1},$$

a to je trebalo dokazati.

Ako se uzme, da je

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = -i,$$

ako se pogodi, što treba u izvedenom dokazu preinačiti.

Dakle nam još ostaje, da uzmemo, da je

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = -1.$$

Ako je to tako, odredit ćemo prosti broj ρ, koji zadovoljava ove jednadžbe:

$$\left\{\frac{i}{\rho}\right\} = i, \quad \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = -1.$$

Onda je sigurno i

$$\left\{\frac{\rho}{\varkappa}\right\} = -1$$

ili još dalje

$$\left\{\frac{\lambda\rho}{\varkappa}\right\} = 1.$$

Poradi te jednadžbe $\varkappa$ je u tijelu $K_1 = k(\sqrt[4]{\lambda\rho}, i)$ relativna norma $N_{1,k}$ izvjesnoga prostoga ideala $\mathfrak{R}_1$. Karakterni sustav broja $\varkappa$ sadržava simbole

$$\left\{\frac{\varkappa, \lambda\rho}{\lambda}\right\}, \quad \left\{\frac{\varkappa, \lambda\rho}{\rho}\right\},$$

no budući da je

$$\left\{\frac{i, \lambda\rho}{\rho}\right\} = i,$$

Digitized by Google

sastoji se karakterni sustav ideala $\mathfrak{R}_1$ poradi toga, što je

$$\left\{\frac{\varkappa,\ \lambda\rho}{\rho}\right\} = -1,$$

od simbola

$$\left\{\frac{-\varkappa,\ \lambda\rho}{\lambda}\right\},$$

a on mora biti jednak *1*. Dobivamo dakle jednadžbu:

$$\left\{\frac{-\varkappa,\ \lambda\rho}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{-\varkappa,\ \lambda}{\lambda}\right\}\left\{\frac{-\varkappa,\ \rho}{\lambda}\right\}^{-1} = 1.$$

A iz nje poradi jednadžbi:

$$\left\{\frac{-1,\ \lambda}{\lambda}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{-1,\ \rho}{\lambda}\right\} = -1, \quad \left\{\frac{\varkappa,\ \rho}{\lambda}\right\} = 1,$$

izlazi, da mora biti

$$\left\{\frac{\varkappa,\ \lambda}{\lambda}\right\} = -1.$$

Tim je dokazan dopunidbeni zakon i za prosti broj $\varkappa$ treće vrste.

Uzmimo napokon, da je $\varkappa$ prost broj druge vrste i da pripada k 15. grupi ostataka s obzirom na λ^7. Opet ćemo lako spoznati, da iz jednadžbe

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = 1$$

izlazi jednadžba

$$\left\{\frac{\varkappa,\ \lambda}{\lambda}\right\} = 1.$$

Treba samo promatrati tijelo $k\ (\sqrt[4]{\lambda},\ i)$ pa poslužiti se tim, da karakterni sustav svakoga ideala toga tijela stoga, što je

$$\left\{\frac{i,\ \lambda}{\lambda}\right\} = 1,$$

sadržava samo jedan simbol.

Ako je pak

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = i,$$

Digitized by Google

odredit ćemo prosti broj ρ prema jednadžbama:

$$\left\{\frac{i}{\rho}\right\} = i, \quad \left\{\frac{\varkappa}{\rho}\right\} = -i,$$

no pri tom ćemo ρ uzeti u obliku:

$$\rho \equiv (3,\ 3,\ c), \quad (\lambda^7).$$

Postupamo li onda upravo onako, kao u predašnjem slučaju, uvjerit ćemo se opet o ispravnosti dopunidbenoga zakona (1).

Slučaj

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = -i$$

i ne treba više napose razlagati. A i u slučaju

$$\left\{\frac{\lambda}{\varkappa}\right\} = -1$$

uvjerit ćemo se o istinitosti jednadžbe (1), ako prosti broj ρ odredimo kao u analognom dijelu predašnjega slučaja i dalje posve jednako postupamo. Jednadžbe se predašnjega slučaja pri tom ne mijenjaju.

Tim je dopunidbeni zakon potpuno dokazan za proste brojeve svih triju vrsta, za proste brojeve druge i treće vrste doduše samo pod pretpostavkom, da oni pripadaju k 13. ili 15. grupi ostataka s obzirom na λ^7. No ako se obazremo na to, da je

$$\left\{\frac{i^s, \lambda}{\lambda}\right\} = 1$$

za svaki cijeli racionalni s, bit će nam odmah jasno, da (1) vrijedi za proste brojeve kojegagod oblika.

Digitized by Google

§ 14.

Pravi broj bikvadratnih rodova u tijelu K_1.

U početku ove radnje uzesmo, da μ nije djeljiv nikakvim kvadratnim brojem tijela k. Stoga možemo napisati μ u obliku

$$\mu = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t,$$

gdje su $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_t$ sve sami različiti prosti brojevi.

Uzmimo, da su ti prosti brojevi ostaci makar koje od grupa: 1., 2., 13. ili 14., a $\mu \equiv 1$, $1+4i$, ili -3, (λ^6), to diskriminanta $D_{1,k}$ tijela $K_1 = k(\sqrt{\mu}, i)$ nije djeljiva sa λ, nego sadržava samo proste brojeve $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_t$ kao faktore. Ako nam ν prikazuje normu $N_{1,k}$ kojega prostoga ideala $\mathfrak{N}_1$ tijela K_1, to se karakterni sustav toga ideala, budući da je

$$\left\{\frac{i}{\pi_1}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{i}{\pi_2}\right\} = 1, \ldots \left\{\frac{i}{\pi_t}\right\} = 1$$

sastoji od simbola:

$$\left\{\frac{\nu}{\pi_1}\right\}, \quad \left\{\frac{\nu}{\pi_2}\right\}, \ldots \ldots \left\{\frac{\nu}{\pi_t}\right\}.$$

Neka budu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon t$ koje mu drago potencije jedinice i, za koje je

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_t = 1.$$

Odredit ćemo, što se uvijek i dade, prosti broj ρ prema jednadžbama:

$$(1) \quad \left\{\frac{i}{\rho}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{\pi_1}{\rho}\right\} = \varepsilon_1, \quad \left\{\frac{\pi_2}{\rho}\right\} = \varepsilon_2 \ldots \left\{\frac{\pi_t}{\rho}\right\} = \varepsilon_t.$$

Poradi prve od tih jednadžbi ρ je prost broj treće vrste, pa stoga valjaju i ove jednadžbe:

$$(2) \qquad \left\{\frac{\rho}{\pi_1}\right\} = \varepsilon_1, \quad \left\{\frac{\rho}{\pi_2}\right\} = \varepsilon_2 \ldots \left\{\frac{\rho}{\pi_t}\right\} = \varepsilon_t.$$

Iz (1) izlazi neposredno, da je

Digitized by Google

$$\left\{\frac{\pi_1\pi_2 \ldots . \pi_t}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\mu}{\rho}\right\} = 1,$$

pa stoga je ρ u tijelu K_1 norma $N_{1,k}$ izvjesnoga ideala $\mathfrak{R}_1$. Karakterni se sustav toga ideala poradi jednadžbi:

$$\left\{\frac{i}{\pi_1}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{i}{\pi_2}\right\} = 1, \ldots \left\{\frac{i}{\pi_t}\right\} = 1$$

sastoji od t simbola:

$$\left\{\frac{\rho}{\pi_1}\right\}, \left\{\frac{\rho}{\pi_2}\right\}, \ldots\ldots \left\{\frac{\rho}{\pi_t}\right\}.$$

Produkt je tih simbola prema (1) i (2) jednak 1 tako, te možemo staviti:

$$\left\{\frac{\rho}{\pi_1}\right\} \left\{\frac{\rho}{\pi_2}\right\} \ldots\ldots \left\{\frac{\rho}{\pi_t}\right\} = 1.$$

Vidimo dakle, da svakomu sustavu jedinica $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon t$, koje zadovoljavaju jednadžbu (1), odgovara izvjestan rod. Takovih sustava ima 4^{t-1}. No budući da smo već prije pokazali, da broj rodova ne prekoračuje broja 4^{t-1}, prikazuje nam broj 4^{t-1} pravi broj rodova tijela K_1 u ovom slučaju.

U slučaju, da je bilo

$$\left\{\frac{i}{\mu}\right\} = -1,$$

promatrasmo samo takova tjelesa $K_1 = k(\sqrt[4]{\mu}, i)$, za koja je μ prost broj 15. grupe ostataka s obzirom na λ^7. Našli smo, da u tom slučaju svi idealski razredi tijela K_1 pripadaju glavnomu rodu, koji je određen jednim simbolom.

Još ćemo pokazati, ako je

$$\left\{\frac{i}{\mu}\right\} = \pm i,$$

da je produkt svih karaktera, koji čine karakterni sustav kojega ideala tijela $K_1 = k(\sqrt[4]{\mu}, i)$, jednak 1. Osim prostih brojeva $\pi_1, \pi_2, \ldots . \pi t$, što ih sadržava μ kao faktore, nalazi se u diskriminanti $D_{1,k}$ tijela K_1 još i prosti broj λ. No budući da je

Digitized by Google

$$\left\{\frac{i}{\mu}\right\} = \pm i,$$

sastoji se bikvadratni karakterni sustav svakoga ideala tijela K_1 od t simbola.

Uzet ćemo opet t jedinica $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_t$ tijela k, koje zadovoljavaju jednadžbu (1), i odrediti prosti broj ρ, koji zadovoljava jednadžbe:

$$\left\{\frac{i}{\rho}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{\pi_1}{\rho}\right\} = \varepsilon_1, \quad \left\{\frac{\pi_2}{\rho}\right\} = \varepsilon_2, \ldots\ldots \left\{\frac{\pi_t}{\rho}\right\} = \varepsilon_t;$$

ρ neka bude ostatak 13. grupe s obzirom na λ^7. Tada izlaze odmah ovi snošaji:

$$\left\{\frac{\pi_1\pi_2 \ldots \pi_t}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\mu}{\rho}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{\rho}{\pi_1}\right\} = \varepsilon_1, \quad \left\{\frac{\rho}{\pi_2}\right\} = \varepsilon_2, \ldots \left\{\frac{\rho}{\pi_t}\right\} = \varepsilon_t.$$

Poradi prve od tih jednadžbi ρ je norma $N_{1,k}$ izvjesnoga prostoga ideala $\mathfrak{R}_1$ u tijelu k $(\sqrt[4]{\mu}, i)$. Promislimo li, da je

$$\left\{\frac{i, \mu}{\lambda}\right\} = \pm i, \quad \left\{\frac{\rho, \mu}{\lambda}\right\} = 1,$$

vidimo, da se karakterni sustav ideala $\mathfrak{R}_1$ sastoji od simbolâ:

$$\left\{\frac{\rho}{\pi_1}\right\}, \quad \left\{\frac{\rho}{\pi_2}\right\}, \ldots\ldots \left\{\frac{\rho}{\pi_t}\right\},$$

kojih je produkt jednak 1. Nastavimo li sada zaključivanje, kao u prvom slučaju, uvjerit ćemo se, da je i u ovom slučaju broj rodova jednak 4^{t-1}.

Ako dakle označimo sa r broj simbolâ, koji nam određuju pojedini rod tijela k $(\sqrt[4]{\mu}, i)$, to je u tjelesima, što smo ih mi promatrali, pravi broj rodova jednak 4^{r-1}.

§ 15.

Nekoliko dodataka o nađenom zakonu recipročnosti i o dopunidbenom zakonu.

Bikvadratni zakon recipročnosti, što smo ga dobili u obliku:

$$(1) \qquad \left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\} = \left\{\frac{\pi_1, \pi}{\lambda}\right\} \left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\},$$

Digitized by Google

gdje je, ako se stavi $\pi \equiv (a, b, c)$, $\pi_1 \equiv (a_1, b_1, c_1)$, (λ^7),

$$\left\{\frac{\pi_1, \pi}{\lambda}\right\} = i^{a_1 b - a b_1 + 2 b b_1},$$

odlikuje se od bikvadratnoga zakona recipročnosti, koji se dobiva teorijom dijeljenja kruga, po tom, da on u obliku (1) vrijedi za proste brojeve π i π_1, kakav im god bio oblik, dok ga teorija dijeljenja kruga daje u obliku, koji se neposredno može primijeniti samo na proste brojeve π, π_1, ako su svedeni na primarni oblik, to znači, ako su oni $\equiv 1$, ili $\equiv 1 + 2i$, (4), ili drugim riječima, ako su oni ostaci 9., 12., 13. i 16. grupe ostataka s obzirom na λ^7.

Jednadžba (1), ako su π i π_1 prosti brojevi svedeni na primarni oblik, prelazi u jednostavniju:

$$\left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\} = (-1)^{b b_1} \left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\} \tag{2}$$

ili, ako se obazremo na jednadžbu (1*) § 9., u ovu:

$$\left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\} = (-1)^{\frac{n(\pi)-1}{4} \cdot \frac{n(\pi_1)-1}{4}} \left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\}.$$

U tom nam se obliku prikazuje bikvadratni zakon recipročnosti po teoriji dijeljenja kruga.

Jednadžba (2) vrijedi i onda, ako π i π_1 imadu takav oblik, da je $a = b$, $a_1 = b_1$.

Što je rečeno o bikvadratnom zakonu recipročnosti, vrijedi u još većoj mjeri o dopunidbenom zakonu, što smo ga mi našli. Naš je dopunidbeni zakon neovisan o obliku prostoga broja, a uz to ukusniji od dopunidbenoga zakona, što ga daje teorija dijeljenja kruga.

Ako stavimo za prosti broj π primarnoga oblika:

$$\pi = u + vi \equiv (a, b, c), \quad (\lambda^7),$$

izlazi po teoriji dijeljenja kruga:

$$\left\{\frac{\lambda}{u+vi}\right\} = i^{\frac{1}{2}(u - v - v^2 - 1)};$$

Digitized by Google

mi pak nađosmo, da je

$$\left\{\frac{\lambda}{u+vi}\right\} = i^{-(b+c)} .$$

Te nam dvije jednadžbe daju osobitu relaciju:

$$\frac{1}{4}(u-v-v^2-1) \equiv -(b+c), \quad (4).$$

Brojevi b i c ostaju isti, ako se π i ne uzme u primarnom obliku.

Našim je istraživanjem otkriveno duboko značenje izraza

$$\left\{\frac{\pi}{\pi_1}\right\}\left\{\frac{\pi_1}{\pi}\right\}^{-1} \quad \text{i} \quad \left\{\frac{\lambda}{\pi}\right\},$$

koje se iz dokaza po teoriji dijeljenja kruga ne razabira.

Digitized by Google

Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga.

Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 15. srpnja 1903.

ČLAN DOPISNIK DR. VLADIMIR VARIČAK.

Element luka pseudosferne površine, izvedene rotacijom traktrise

$$r = a \sin \varphi, \quad z = a \left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right)$$

oko osi z, može se pisati u obliku

$$ds^2 = a^2 (du^2 + e^{2u}\, dv^2).$$

Supstitucijama

$$v = x, \quad e^{-u} = y,$$

projicira se pseudosferna površina na pozitivnu polovinu ravnine. Uzmemo li još a za jedinicu dužine, prijeći će onaj izraz za element luka poradi ovih supstitucija u

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Poznato je, kako se geometrija Lobačevskoga interpretira na pseudosferi, pa je jasno, da ćemo je moći interpretirati i u pozitivnoj polovini ravnine, ako uzmemo ovakav izraz za element luka. Ova se interpretacija, koja potječe od Poincaréa, primjenjuje na pr. u teoriji automorfnih funkcija. Njom su se pobliže bavili Lahtin[1] i A. Schwarz[2]. Elementom luka nijesu doduše

[1] Л. К. Лахтин: Объ одномъ конкретномъ истолкованіи планиметріи Лобачевскаго. Математическій Сборникъ. XVII.

[2] A. Schwarz: Zur Theorie der reellen linearen Transformationen und der Lobatschewskyschen Geometrie. Wiener Sitzungsberichte II. Abth. t. 99. god. 1890.

Digitized by Google

određena sva svojstva prostora, tako na pr. nije određena s u v i s l o s t, ali se ipak mogu proučiti mnoga svojstva njegova. U ovoj ću radnji na osnovi rečene interpretacije izvesti neke relacije hiperbolne geometrije.

1. **Neke konstrukcije.** Potražit ćemo najprije geodetsku liniju u pozitivnoj polovini ravnine (x, y) uz onakav izraz za element luka. Udaljenost tačaka M_0 i M_1 dana je integralom

$$s = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\sqrt{1+x'^2}}{y} dy. \qquad (1)$$

Uzmemo li oznaku

$$\frac{\sqrt{1+x'^2}}{y} = F, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = X'_1,$$

onda ova zadaća vodi na jednadžbu

$$X - X'_1 = 0.$$

Kako je ovdje $X = 0$, reducira se ona na $X_1 = c$ ili

$$\frac{x'}{y\sqrt{1+x'^2}} = c;$$

integracijom se dobije jednadžba geodetske linije

$$x^2 + y^2 - 2c_2 x = c_1^2 - c_2^2.$$

Ovo je krug sa središtem na osi apscisa. Konstante $c_1 = \frac{1}{c}$ i c_2 mogu se odrediti time, što ovaj krug ima da prolazi tačkama $M_0\,(x_0, y_0)$ i $M_1\,(x_1, y_1)$. Da su izpunjeni uvjeti za minimum, ne trebamo izvoditi; pokazao je to na pr. A. S c h w a r z u spomenutoj

---

U spomenspisu, što ga je kološvarsko sveučilište publiciralo g. 1902. u spomen stogodišnjice rođenja J. B o l y a i a, nalazi se „Index operum ad geometriam absolutam spectantium", koji je priredio R. Bonola. Tu su pobrojane radnje o apsolutnoj geometriji počevši od g. 1839. U svemu je navedeno 623 + 292 natpisa. Slučajno se ne navodi prethodna S c h w a r z o v a radnja.

Digitized by Google

radnji. U ovake se krugove transformiraju geodetske linije pseudosfere poradi navedenih supstitucija.

Ako središte kruga, koji prolazi kroz tačke $M_0(r, \varphi)$ i $M(r, \psi)$, uzmemo za pol O, a os apscisa za polarnu os, jednadžba (1) daje nam

$$s = \int_{\varphi}^{\psi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \qquad (2)$$

Kako ćemo raspoloviti luk $M_0 M$? Ovo odgovara raspolavljanju segmenta pravca u Euklidovoj geometriji. Neka je $N(r, \varphi_1)$ raspolovište luka $M_0 M$. Relacija arc MN = arc NM_0 može se također pisati

$$\log \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

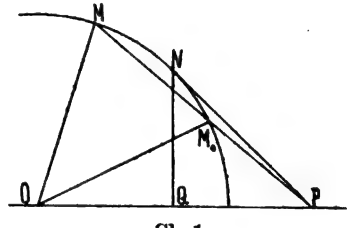
ili

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Izrazimo li $\cos \varphi_1$ s pomoću $\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}$, naći ćemo izraz

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \frac{\psi + \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}.$$

Spojimo M i M_0 i produžimo tu spojnicu, dok ne presiječe os X u tački P. Lako se vidi, da je u trokutu OPM



Sl. 1.

$$\sphericalangle M = 90^0 - \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad \sphericalangle P = 90^0 - \frac{\varphi + \psi}{2},$$

pa je tako

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sin P}{\sin M} = \frac{OM}{OP}.$$

Digitized by Google

Projekciju tačke N u os X označimo sa Q, pa je onda

$$\cos \varphi_1 = \frac{OQ}{OM}.$$

Ove dvije jednadžbe daju $OP \,.\, OQ = OM^2$. No sada su poznate tačke O i P i polumjer kruga OM, pa lako možemo naći tačku Q. Ona je presjek osi i polare tačke P s obzirom na krug određen tačkama M i M_0. Treba dakle iz tačke P položiti na krug tangentu; diralište je raspolovište luka MM_0. Samo kad je MM_0 paralelno s osju X, raspolovljen je luk i s gledišta Euklidove geometrije. A. Schwarz našao je ovu konstrukciju posve drugim putem.

Ako je spojnica tačaka M i M_0 normalna na os X, onda je $x = \text{const.}$, $dx = 0$, pa iz (1) dobivamo

$$s = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \log \frac{y_1}{y_0}. \qquad (3)$$

Polovište N segmenta MM_0 ima ordinatu y, koja ispunjava relaciju $y^2 = y_1 y_0$; nju je lako konstruirati kao geometrijsku sredinu.

Jasno je sada, kako bismo riješili obrnutu zadaću: da se podvostruči zadani luk.

Za izvođenje konstrukcijâ potrebno je još znati, kako se jednaki segmenti prenose s jedne geodetske linije na drugu. Najprije ćemo riješiti zadaću, da se luk AB prenese od tačke C na istom polukrugu tako, da bude $CD = AB$. To ćemo učiniti tako, da spojimo B i C, a spojnicu produžimo, dok ne presiječe os X u tački F. Spojnica AF presijeca polukrug u tački D. Lako je obrazložiti ovu konstrukciju. Ako naime segment BC raspolovimo u tački E, onda je tom tačkom raspolovljen i AD. Segment pak BC znademo kako se raspolavlja.

Sada ćemo luk AB prenijeti s jednoga polukruga na drugi. Kod koncentričnih krugova ide to lako. U izrazu (2) za dužinu luka ne dolazi polumjer, pa su tako lukovi koncentričnih krugova, koji se nalaze između ista dva radija vektora, među sobom jednaki. To se vidi i otud, što se element luka $ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ ne mijenja poradi transformacije

Digitized by Google

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky$$

t. j. poradi homotetije, kojoj je pol u ishodištu koordinata.

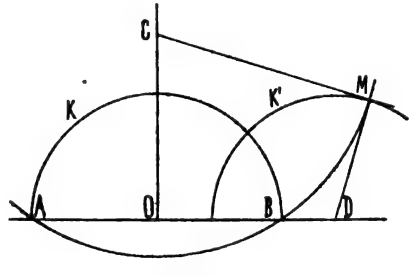
Ako bismo pak imali prenijeti luk AB s jednoga polukruga na polukrug koncentričan, ali tako, da mu krajnja tačka A padne u makar koju tačku C_1, produžit ćemo najprije polumjere OA i OB; tako ćemo na drugom polukrugu dobiti luk $CD = AB$, a onda je lako prenijeti CD počevši od C_1, t. j. načiniti $C_1D_1 = CD$.

Najopćenitija je zadaća, da se luk AB prenese na drugi polukrug K', koji nije koncentričan s polukrugom K, na kom se nalazi AB, a nema ni polumjer s njime jednak. Nacrtat ćemo polukrug K'', koji je koncentričan sa K i ima polumjer jednak sa K'. Zatim ćemo luk AB prenijeti sa K na K'', da bude $CD = AB$. Na K'' treba onda naći tačke C' i D' tako, da je $CC' \parallel DD' \parallel OX$. Izraz se onaj za element luka ne mijenja poradi translacije duž osi X, t. j. poradi supstitucije $x_1 = x - k$.

Moglo bi se također iskati, da C' ima pasti u makar koju tačku polukruga K''.

Dalja je elementarna konstrukcija: da se spusti normala iz neke tačke na zadani pravac.

U pozitivnoj polovini ravnine (x,y), u kojoj je dužina luka dana formulom (1)[1], odgovara tomu ova zadaća: Na polukrug K sa središtem u O, koji os X presijeca u tačkama A i B, treba tačkom M povući krug K', komu je središte isto tako na osi X i koji je ortogonalan prema krugu K. Ovaj se zadatak rješava s pomoću ortogonalnih trajektorija sistema krugova, koji prolaze tačkama A i B.



Sl. 2.

Traženi krug K' bit će normalan na svaki krug rečenoga sistema, dakle i na krug, koji prolazi tačkom M, a pripada u taj sistem. Središte je toga kruga na osi Y u tački C, koja se dobije, kad se os Y presiječe normalom dignutom u raspolovištu dužine

[1] Ovu ćemo ravninu bilježiti u kratko L_2.

Digitized by Google

MB. Povucimo CM i zatim $MD \perp CM$. Onda je D središte traženoga kruga K', a DM mu je polumjer.

Kad tačka M padne u os X, treba k trima tačkama A, B, M konstruirati četvrtu harmonijski pridruženu tačku N. Dijametar traženoga ortogonalnoga kruga jest MN. Znade se, da svaki krug, koji prolazi kroz dva recipročna pola, normalno siječe osnovni krug.

Uzmimo još, da tačka M dođe na krug K. Tangenta na K u tački M presijeca os X u središtu normalnoga kruga.

2. **Kut paralelnosti.** Ovdje se nadaje prilika istaknuti jednu razliku između Euklidove geometrije i geometrije Lobačevskoga.

Neka u Euklidovoj ravnini dva pravca K i K' zatvoraju kut α. Ako na kraku K uzmemo tačku M i u njoj uzdignemo okomicu, ona će zgađati drugi krak K', pa makar kako daleko od vrha kuta α uzeli tačku M.

U ovoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga onim pravcima odgovaraju dva polukruga K i K', kojima su središta na osi X i koji među sobom zatvoraju kut α. Neka polukrug K presijeca os X u tačkama A i B, a K' neka presijeca istu os u tačkama C i D. Polukruzi K i K' neka se sijeku u E pod kutom α. Položimo tačkom C polukrug K'' normalan na K, i neka on K presijeca u tački F. Onda vidimo, da je F posljednja tačka, u kojoj se na K može dići normala, koja zgađa drugi krak K' kuta α. Normale uzdignute u tačkama, koje se nalaze na luku FB, ne zgađaju više krak K'. Normala FC paralelna je s krakom K'; ona ga zgađa u osi X, a u ovoj je interpretaciji os X skup tačaka neizmjerno udaljenih.

Neka je zadana geodetska linija K'' i tačka E, a tom tačkom imamo povući paralelu prema K''. Vidi se, da ćemo osim prethodnoga polukruga K' dobiti još polukrug K''', koji prolazi tačkom E i tačkom G, u kojoj K'' po drugi put siječe os X.

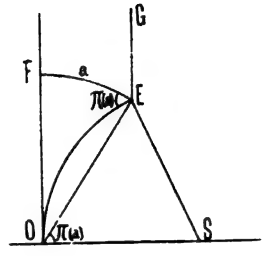
Mogu se dakle u ravnini Lobačevskoga jednom tačkom povući dvije paralele sa zadanim pravcem (ili neizmjerno mnogo, ako za paralele držimo i sve druge pravce, koji prolaze tom tačkom, a ne zgađaju zadani pravac).

Lako razabiramo, da je α t. j. kut paralelnosti, koji pripada normali $a = EF$ nekakva funkcija te normale; označit ćemo je sa $\Pi(\alpha)$. Kad a raste, vidi se iz slike, da se α umanjuje. Kad

Digitized by Google

E padne u tačku A, onda je $a = \infty$, a $\alpha = 0$. Kad se a umanjuje, α raste, i kad E padne u F, postane $\alpha = 90^0$. U geometriji Euklidovoj kut je paralelnosti konstantno pravi kut.

Iz ove bismo slike mogli odrediti funkciju $\Pi(\alpha)$; tako radi na pr. Lahtin u spomenutoj radnji. No jednostavnije će se odrediti, ako se uzme, da geodetska linija K'' prijeđe u os Y. Tačkom E prolaze dvije geodetske paralele; jedna je luk EO, a druga pravac $EG \parallel OY$. Normala a luk je kruga sa središtem u O. Vidi se, da je



Sl. 3.

$\sphericalangle \widehat{FEO} = \sphericalangle \overline{EOS}$, a $\sphericalangle \overline{EOS} = \sphericalangle FEG$, dakle je i $\sphericalangle \widehat{FEO} = \sphericalangle FEG$ t. j. kutovi paralelnosti jednaki su za obje paralele.

Odredimo sada dužinu luka a. Znamo, da je

$$a = \int_{\Pi(\alpha)}^{\pi_2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \operatorname{cotg} \frac{\Pi(a)}{2},$$

i tako je

$$\operatorname{cotg} \frac{\Pi(a)}{2} = e^a. \qquad (4)$$

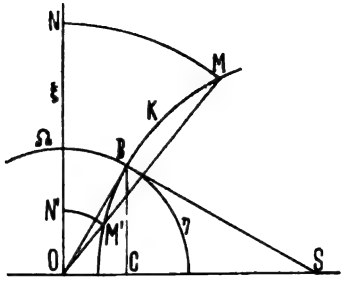
Tim je određena relacija između normale a i kuta $\alpha = \Pi(a)$. U formulama geometrije Lobačevskoga može se na temelju ove relacije učiniti, da dolaze ili samo kutovi ili samo dužine. Još se s pomoću ove relacije mogu ciklične funkcije veličine $\Pi(a)$ izraziti s pomoću hiperbolnih funkcija argumenta a. Tako se dobiju oblici, koji su prikupljeni na pr. u Engelovu izdanju Lobačevskoga[1] na str. 345.

3. **Paralele s osju** ξ. Potražit ćemo jednadžbe ovih dviju paralela. No prije ćemo po Lahtinu uvesti jednu vrstu geodetskih koordinata. Opišimo iz početne tačke O pravokutnoga koordinatnoga sistema polukrug s polumjerom $r = 1$, i to u pozitivnoj poli

[1] F. Engel: Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen. Leipzig 1898.

Digitized by Google

ravnine. Gdje on presijeca os Y, tu je početak Ω geodetskoga koordinatnog sistema. Taj polukrug uzet ćemo za os η, a pozitivni dio osi Y za os ξ, koja će se iznad Ω uzimati kao pozitivna, a ispod Ω kao negativna. Neka je sad zadana tačka $M(x,y)$; njezine će geodetske koordinate biti



Sl. 4.

$$\xi = \Omega N, \quad \eta = NM.$$

Dužinu ΩN odredit ćemo po formuli (3) uzimljući $y_0 = 1$, a $y_1 = ON = \sqrt{x^2+y^2}$. Luk pak MN odredit ćemo po (2). Tako je

$$\xi = \log \sqrt{x^2+y^2}, \quad \eta = -\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

ili

$$e^{2\xi} = x^2+y^2, \quad e^{-\eta} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Još se vidi, da je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Sada možemo $\operatorname{tg}\varphi$ izraziti sa $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, pa kad još uzmemo na pomoć prvu jednadžbu, naći ćemo

$$x = e^{\xi} \operatorname{th} \eta, \quad y = \frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch} \eta} \tag{5}$$

ili

$$x = e^{\xi} \cos \Pi(\eta), \quad y = e^{\xi} \sin \Pi(\eta). \tag{6}$$

Ovima se relacijama prelazi s pravokutnoga koordinatnog sistema u Euklidovoj ravnini na ovaj geodetski koordinatni sustav u ravnini L_2.

Za element luka nalazimo u ovim koordinatama izraz

$$ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta \, d\xi^2 + d\eta^2},$$

Digitized by Google

a za element površine

$$dp = \operatorname{ch}\eta\, d\xi\, d\eta.$$

Ovaj se posljednji izraz može dobiti transformacijom izraza $\frac{dxdy}{y^2}$ na geodetske koordinate. Jacobijeva je determinanta

$$|J| = \frac{e^{2\xi}}{\operatorname{ch}\eta}.$$

No može se i geometrijski raditi. Linije $\xi = \text{const.}$ i $\eta = \text{const.}$ dijele ravninu izotermički. Dužine stranica elementarnih pravokutnika jesu $\operatorname{ch}\eta\, d\xi$ i $d\eta$, pa tako dobivamo odmah gornji izraz.

Potražimo sada paralelu s negativnom stranom osi ξ, ako još ima da prolazi tačkom B na osi η. S gledišta Euklidove geometrije ova je paralela krug, komu je središte u S i koji prolazi kroz O. Trokut OCS daje

$$OS = \frac{1}{2\cos\Pi(b)},$$

jer je $OC = \frac{1}{2}$, a $\Omega B = b$. Jednadžba kruga, kojim je predočena spomenuta paralela, glasi

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{\cos\Pi(b)} = 0,$$

a u geodetskim koordinatama

$$\operatorname{th}\eta = e^{\xi}\operatorname{th} b$$

ili

$$\cos\Pi(\eta) = e^{\xi}\cos\Pi(b).$$

Paralela s pozitivnom stranom osi ξ, koja na osi η odsijeca dužinu b, predočena je pravcem

$$x = \cos\Pi(b)$$

ili s pomoću (6)

$$\cos\Pi(\eta) = e^{-\xi}\cos\Pi(b), \qquad (7)$$

a ovo se nalazi u Engela na str. 25. Tamo dolaze jednadžbe još nekih pravaca, a te ćemo i ovdje izvesti.

Digitized by Google

4. **Pravac u općenom položaju.** Pravac, koji prolazi ishodištem koordinata Ω i s osju ξ zatvora kut A, predočen je u L_2-ravnini polukrugom, komu je apscisa središta $OS = \operatorname{cotg} A$, a polumjer $\Omega S = \operatorname{cosec} A$. Jednadžba mu je

$$x^2 + y^2 - 2x \operatorname{cotg} A = 1$$

ili

$$e^{2\xi} - 2e^{\xi} \cos \Pi(\eta) \operatorname{cotg} A = 1.$$

Kako je $\operatorname{sh} \xi = \operatorname{cotg} \Pi(\xi)$, možemo ovo pisati

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \Pi(\xi) \cos \Pi(\eta). \tag{8}$$

Pravac okomit na os ξ, koji na njoj odsijeca dužinu b, ima jednadžbu

$$\xi = b.$$

Uzmimo sada pravac okomit na os η, koji na njoj odsijeca dužinu $\Omega B = b$. Slika mu je polukrug sa središtem u S i s polumjerom SB. (Slika 4.) Najprije je OC ono x, koje odgovara vriiednostima $\xi = 0$, $\eta = b$. Dakle je po (6)

$$OC = \cos \Pi(b),$$

a kako je $OB = 1$, imamo

$$OS = \frac{1}{\cos \Pi(b)}, \quad BS = \operatorname{tg} \Pi(b).$$

Jednadžba je rečenoga polukruga

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{\cos \Pi(b)} + 1 = 0$$

ili po (6)

$$\frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} = \frac{\cos \Pi(\eta)}{\cos \Pi(b)},$$

a napokon

$$\cos \Pi(\eta) \sin \Pi(\xi) = \cos \Pi(b). \tag{9}$$

Uz ovu ćemo sliku 4. još pokazati, da je refleksija na jediničnom krugu, komu je središte u O, u ovom mjerenju isto, što i refleksija na pravcu u običnom mjerenju.

Digitized by Google

Uzmimo tačku $M(\xi, \eta)$ i potražimo tačku $M'(-\xi, \eta)$. Tačkom M povući ćemo normalni krug K na polukrug jedinični, kojim je predočena os η; luk toga normalnog kruga jest MB, i sada moramo načiniti $BM' = MB$. Povući ćemo u B tangentu na K; ona će proći kroz O, a sastavivši O sa M dobit ćemo na K tačku M'. A odmah se vidi, da se ova tačka M' dobije iz M transformacijom s pomoću reciprokih radija vektora. Po slici je

$$OB^2 = OM \,.\, OM'$$

ili

$$O\Omega^2 = ON \,.\, ON'.$$

Tačka Ω raspolavlja dužinu $N'N$, dakle je doista $\xi' = -\xi$. Izraz za element luka, kako je dan u geodetskim koordinatama, ne mijenja se poradi refleksije na $\eta = 0$. Kad uzmemo na um predašnje slučajeve, gdje je luk ostajao neizmijenjen, možemo lako zaključiti, da se luk ne mijenja poradi općene projektivne transformacije.

Sada ćemo uzeti pravac, koji os η siječe pod kutom A i na njoj odsijeca dužinu b. Označimo tačku, u kojoj taj pravac siječe os η, sa M, a tačku, u kojoj on siječe os X, sa B. Središte kruga, kojim je taj pravac predočen, neka je na osi X u tački S. U trokutu OMS imamo kod O kut $\Pi(b)$, a kod M kut A, a strana je $OM = 1$. Dakle je

$$OS = \frac{\sin A}{\sin[A+\Pi(b)]}, \qquad MS = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin[A+\Pi(b)]}.$$

Jednadžba kruga, kojim je ovaj pravac predočen, jest

$$(x - OS)^2 + y^2 = SM^2,$$

a iza malene preobrazbe

$$(x^2+y^2)\sin[A+\Pi(b)] - 2x\sin A = \frac{\sin^2\Pi(b) - \sin^2 A}{\sin[A+\Pi(b)]}.$$

Brojnik razlomka na desnoj strani pisat ćemo kao produkt sume i diferencije dvaju sinusa, a onda ovu sumu i diferenciju pretvoriti u produkt. Nazivnik se pak dade izraziti funkcijama polovine argumenta, i tako se prethodni izraz dade pisati u obliku

Digitized by Google

$$2x \sin A = (x^2+y^2) \sin [A+\Pi(b)] + \sin [A-\Pi(b)]$$

ili napokon

$$2 \cos \Pi(\eta) \sin A = e^{\xi} \sin [A+\Pi(b)] + e^{-\xi} \sin [A-\Pi(b)]. \quad (10)$$

Uzmemo li ovdje $A = 90^0$, dobit ćemo (9), a uz $A = \Pi(b)$ imamo palalelu s $-\xi$.

Analogan je zadatak, da se nađe pravac, koji u udaljenosti b od ishodišta Ω presijeca os ξ pod kutom A. Krug, kojim je ovaj pravac predočen, neka ima središte na osi X u tački S. a os ξ neka on presijeca u M. Vidimo, da je OM ono y, koje odgovara vrijednostima $\eta = 0$, $\xi = b$, dakle je

$$OM = e^b.$$

Iz trokuta OMS imamo

$$OS = \frac{e^b}{\operatorname{tg} A}, \quad MS = \frac{e^b}{\sin A};$$

dakle je jednadžba kruga

$$x^2 + y^2 - 2x \cdot \frac{e^b}{\operatorname{tg} A} = e^{2b},$$

a po (6) je

$$e^{2\xi} - 2e^{\xi} \cos \Pi(\eta) \cdot \frac{e^b}{\operatorname{tg} A} - e^{2b} = 0.$$

To se dade pisati

$$\frac{e^{2\xi} - e^{2b}}{2e^{\xi}e^b} = \frac{\cos \Pi(\eta)}{\operatorname{tg} A}$$

ili

$$\frac{e^{\xi-b} - e^{-(\xi-b)}}{2} = \frac{\cos \Pi(\eta)}{\operatorname{tg} A},$$

napokon

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \Pi(\xi-b) \cos \Pi(\eta). \quad (11)$$

Za paralelu s negativnom stranom osi η treba uzeti

$$A = \Pi(b),$$

Digitized by Google

pa je

$$\operatorname{tg} \Pi(b) = \operatorname{tg} \Pi(\xi - b) \cos \Pi(\eta).$$

Sada je

$$\operatorname{tg} \Pi(\xi - b) = \frac{\sin \Pi(\xi) \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(\xi) - \cos \Pi(b)},$$

i tako se jednadžba paralele s negativnom stranom osi η javlja u obliku

$$\cos \Pi(\xi) - \cos \Pi(b) - \cos \Pi(b) \cos \Pi(\eta) \sin \Pi(\xi) = 0.$$

Ova paralela odsijeca na osi ξ dužinu b. Uzmemo li $b = \infty$, onda je $\cos \Pi(b) = 1$, a ova jednadžba prelazi u

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(\xi)}{2} = -\cos \Pi(\eta)$$

ili po (4) u

$$e^{-\xi} = -\cos \Pi(\eta).$$

Ovo bismo na isti način dobili i iz (7). To je jednadžba paralele sa $+\xi$ i $-\eta$.

Dodatak. Na osi ξ zadana je tačka T; kako ćemo konstruirati kut paralelnosti, koji pripada dužini $\Omega T = \xi$?

Neka os η presijeca os X u tačkama A i B. Spojimo A i T i u raspolovištu te dužine dignimo okomicu, koja os X siječe u tački P. Onda je $\sphericalangle OPT = \Pi(\xi)$. Pravac AT presijeca os η u D. Spojnica DB paralelna je sa RP. Dalje je

$$\sphericalangle RPA = \frac{1}{2} \Pi(\xi), \text{ dakle i } \sphericalangle DBA = \frac{1}{2} \Pi(\xi),$$

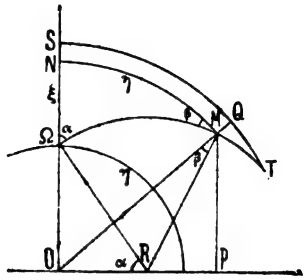
a centrični kut $DOA = \Pi(\xi)$. Treba dakle samo odrediti tačku D spojivši A sa T.

Kut DOA također je kut paralelnosti, koji odgovara dužini ΩD na osi η. Iz toga razabiramo, kako bismo prenijeli zadanu dužinu s jedne osi na drugu.

Ova konstrukcija kuta paralelnosti ne mijenja se, ako je ξ i negativno.

Digitized by Google

5. **Trigonometrija.** Sada ćemo izvesti glavne poučke hiperbolne trigonometrije. Uzmimo pravokutni trokut ΩMN, komu su katete ξ i η, a hipotenuza s.



Sl. 5.

Jednadžba pravca, koji prolazi kroz Ω i M, jest

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\Pi(\xi)\cos\Pi(\eta)$$

ili

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sh}\xi = \operatorname{th}\eta. \qquad (12)$$

Potražit ćemo dužinu ΩM. Za element luka ravnine L_2 dobivamo u geodetskim koordinatama izraz

$$ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta d\xi^2 + d\eta^2} = d\xi\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \eta'^2}.$$

Iz (12) nađe se

$$\operatorname{ch}^2 = \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sh}^2\xi},$$

$$\eta' = \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ch}\xi}{1-\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sh}^2\xi},$$

a kad se ovo uvrsti u prethodni izraz za ds, biva

$$ds = \frac{d\xi}{\cos\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sh}^2\xi)},$$

dakle

$$s = \frac{1}{\cos\alpha}\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1-\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sh}^2\xi}.$$

Supstitucijom

$$\operatorname{th}\xi = t,$$

$$\operatorname{sh}^2\xi = \frac{t^2}{1-t^2},$$

$$d\xi = \frac{dt}{1-t^2}$$

prelazi taj izraz u

Digitized by Google

$$s = \int_0^t \frac{\frac{dt}{\cos\alpha}}{1 - \frac{t^2}{\cos^2\alpha}} = \operatorname{arc\,th}\frac{t}{\cos\alpha}.$$

Tako je

$$\operatorname{th} s \cos\alpha = \operatorname{th}\xi \tag{13}$$

ili

$$\cos\Pi(s)\cos\alpha = \cos\Pi(\xi).$$

Uzmimo sada za element luka izraz

$$ds = d\eta\sqrt{1+\xi'^2}\,.\,\operatorname{ch}^2\eta.$$

Ako iz

$$\xi'^2\,.\,\operatorname{ch}^2\eta = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ch}^2\xi\operatorname{ch}^2\eta}$$

izlučimo ξ na temelju relacije (12), dobit ćemo

$$ds = d\eta\sqrt{\frac{\sec^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{th}^2\eta}} = \frac{d\eta}{\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{th}^2\eta\,(1-\sin^2\alpha)}}$$

ili

$$ds = \frac{d\eta\operatorname{ch}\eta}{\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{sh}^2\eta}} = \frac{\frac{\operatorname{ch}\eta}{\sin\alpha}\,d\eta}{\sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\sin\alpha}\right)^2}}.$$

Supstitucijom $\frac{\operatorname{sh}\eta}{\sin\alpha} = t$ prijeđe ovo u

$$ds = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

pa je tako

$$s = \operatorname{arc\,sh}\frac{\operatorname{sh}\eta}{\sin\alpha}$$

ili

$$\operatorname{sh} s\sin\alpha = \operatorname{sh}\eta, \tag{14}$$

koje se u drugoj oznaci piše

$$\operatorname{tg}\Pi(s) = \operatorname{tg}\Pi(\eta)\,.\,\sin\alpha.$$

Digitized by Google

Kad iz (13) i (14) eliminiramo kut α, dobivamo

$$\operatorname{ch} s = \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta \tag{15}$$

ili

$$\sin \Pi(s) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta).$$

Ovo je ujedno jednadžba kruga sa središtem u Ω i s polumjerom s. Trebamo još koju formulu, u kojoj će dolaziti kut β. Iz slike se vidi, da je

$$OR = \operatorname{cotg}\alpha, \quad OM = e^{\xi}, \quad MR = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Iz trokuta ORM jest

$$\cos\beta = \frac{e^{2\xi} + \operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{cotg}^2\alpha}{2e^{\xi} \operatorname{cosec}\alpha} = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} \sin\alpha$$

t. j.

$$\cos\beta = \sin\alpha \operatorname{ch}\xi \tag{16}$$

ili

$$\sin\alpha = \cos\beta \sin \Pi(\xi).$$

Iz istoga je trokuta

$$\sin O = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

dok je iz trokuta OMP

$$MP = OM . \sin O = e^{\xi} . \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

No MP je ono y, koje pripada vrijednostima ξ i η, te je tako

$$MP = \frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch}\eta}$$

i napokon

$$\cos\alpha = \sin\beta \operatorname{ch}\eta \tag{17}$$

ili

$$\sin\beta = \cos\alpha \sin \Pi(\eta).$$

Ostalih pet formula možemo naći bez slike. Kad (16) i (17) izmnožimo među sobom, izađe

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{ch} s = 1. \tag{18}$$

Digitized by Google

Iz (13) i (17) izlučimo $\cos\alpha$, a u resultatu zamijenimo $\operatorname{ch}\eta$ s vrijednošću, koja mu odgovara po (15), pa će izaći

$$\operatorname{sh}\xi = \operatorname{sh} s \sin\beta. \tag{19}$$

Po (14) i (15) odredimo $\operatorname{th}\eta$, pa ćemo s pomoću (19) dobiti jednadžbu (12), od koje smo i pošli, a s pomoću (16)

$$\operatorname{th}\eta = \operatorname{th} s \cos\beta. \tag{20}$$

Po (19) i (16) odredimo $\operatorname{th}\xi$, pa ćemo s pomoću (14) dobiti

$$\operatorname{th}\xi = \operatorname{sh}\eta \operatorname{tg}\beta. \tag{21}$$

6. **Drugi način izvođenja.** U ostalom bismo trigonometrijske formule u ravnini L_2 mogli izvesti računom varijacija na način analogan onome, kojim je Euler[1] izveo sfernu trigonometriju. Za luk smo imali izraz

$$s = \int_0^{\xi} d\xi \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \eta'^2}.$$

Kako u podintegralnoj funkciji ne dolazi ξ, moći ćemo po formuli

$$F(\eta, \eta') = \eta' \frac{\partial F'}{\partial \eta'} + C$$

pisati

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \eta'^2} = \frac{\eta'^2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \eta'^2}} + C,$$

a otuda

$$d\xi = \frac{C\,d\eta}{\operatorname{ch}\eta \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - C^2}}. \tag{22}$$

Kad u izraz $ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta\, d\xi^2 + d\eta^2}$ uvrstimo prethodni izraz za $d\xi$, izlazi

$$ds = \frac{\operatorname{ch}\eta\, d\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - C^2}}. \tag{23}$$

[1] Vidi Ostwald's Klassiker Nr. 73.

Digitized by Google

U nazivniku izraza (22) možemo C^2 pomnožiti sa $\mathrm{ch}^2\eta - \mathrm{sh}^2\eta = 1$ i onda izlučiti faktor $\sqrt{1-C^2}$, pa će izaći

$$d\xi = d \operatorname{arc\,sh} \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{th}\eta,$$

dok je

$$ds = d \operatorname{arc\,sh} \frac{\operatorname{sh}\eta}{\sqrt{1-C^2}}.$$

Prema tomu je

$$\operatorname{sh}\xi = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{th}\eta,$$

$$\operatorname{sh} s = \frac{\operatorname{sh}\eta}{\sqrt{1-C^2}}.$$

Ogledajmo na slici 5. pravokutni trokut MQT. Na pravcu OM jest η stalno pa je zato $MQ = \mathrm{ch}\,\eta\, d\xi$. Na luku SQ stalno je ξ, zato je $QT = d\eta$, a kad u izraz za MQ supstituiramo za $d\xi$ vrijednost (22), a za $d\eta$ izraz QT, izaći će

$$MQ = \frac{C \,.\, QT}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - C^2}},$$

pa je tako $tg\,\beta = \frac{C}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - C^2}}$, a prema tomu

$$\sin\beta = \frac{C}{\mathrm{ch}\,\eta}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - C^2}}{\mathrm{ch}\,\eta}.$$

Uzmemo li, da M padne u Ω, onda je $\eta = 0$. Po (22) jest

$$\frac{d\eta}{\mathrm{ch}\,\eta\, d\xi} = \frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - C^2}}{C},$$

a ovo će biti $\mathrm{tg}\,\alpha$, kad bude $\eta = 0$. Dakle je

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1-C^2}}{C}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-C^2}, \quad \cos\alpha = C.$$

U izrazima za $\mathrm{sh}\xi$, $\mathrm{sh}s$, $\mathrm{tg}\beta$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ treba C zamijeniti sa $\cos\alpha$, pa se dobiju formule, s pomoću kojih se mogu izvesti sve relacije

Digitized by Google

među kutovima i stranama pravokutnoga trokuta u ravnini Lobačevskoga.

7. **Krug.** Na str. 258. navedenoga djela daje Engel kao jednadžbu pravca u normalnom obliku

$$\cos\omega \,.\, \cos F(\xi) + \sin\omega \,.\, \cos F(\eta) \,.\, \sin F(\xi) = \cos F(p).$$

Ovdje stoji F mjesto Π; k tomu p znači dužinu normale spuštene iz Ω na taj pravac, a ω je kut, što ga ta normala zatvora s osju $+\xi$. Tu ćemo jednadžbu pisati ovako:

$$\cos\omega \operatorname{sh}\xi + \sin\omega \operatorname{th}\eta = \operatorname{th} p \operatorname{ch}\xi.$$

Ako se mijenja kut ω, dok p ostaje isto, ovaj će pravac omotati krug. Derivacija je po ω

$$\cos\omega \operatorname{th}\eta - \sin\omega \operatorname{sh}\xi = 0.$$

Iz ove je dvije jednadžbe

$$\sin\omega = \frac{\operatorname{th} p \operatorname{ch}\xi \operatorname{sh}\xi}{\operatorname{sh}^2\xi + \operatorname{th}^2\eta}$$

$$\cos\omega = \frac{\operatorname{th} p \operatorname{th}\eta \operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}^2\xi + \operatorname{th}^2\eta},$$

dakle $\operatorname{sh}^2\xi + \operatorname{th}^2\eta = \operatorname{ch}^2\xi \operatorname{th}^2 p$ ili iza nekoliko transformacija

$$\operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta = \operatorname{ch} p$$

ili

$$\sin\Pi(\xi) \sin\Pi(\eta) = \sin\Pi(p).$$

Ovo se može pisati

$$e^{\xi} + e^{-\xi} - \frac{2\operatorname{ch} p}{\operatorname{ch}\eta} = 0$$

ili

$$e^{2\xi} + 1 - \frac{2e^{\xi}}{\operatorname{ch}\eta} \,.\, \operatorname{ch} p = 0,$$

a po formuli (5)

$$x^2 + y^2 + 1 - 2y \operatorname{ch} p = 0$$

Digitized by Google

ili

$$x^2 + (y - \operatorname{ch} p)^2 = \operatorname{sh}^2 p$$

ili

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\sin \Pi(p)}\right)^2 = \operatorname{cotg}^2 \Pi(p).$$

S gledišta Euklidove geometrije prikazuje ovo krug sa središtem u $(0, \operatorname{ch} p)$ i s polumjerom jednakim $\operatorname{sh} p$. Ovdje je geodetsko središte bilo u tački Ω, no da smo ga uzeli u $M_0\ (x_0, y_0)$, dobili bismo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} p)^2 = y_0^2 \operatorname{sh}^2 p.$$

Ovaj se oblik nalazi u Lahtina na str. 775.

Do te ćemo općene jednadžbe doći ovako: Uzmimo u ravnini (ξ, η) tačku $B_0\ (\xi_0, \eta_0)$ za središte kruga, komu je polumjer p (vidi sl. 8.). Tačka $B\ (\xi, \eta)$ neka je jedna tačka toga kruga. Iz te tačke B spustimo normalu BQ na $B_0 A_0$. Vidimo, da je BAA_0Q četverokut sa tri prava kuta. Ako označimo

$$QB = q,\ A_0Q = \eta_1,\ AA_0 = \xi_0 - \xi,\ AB = \eta,\ A_0B_0 = \eta_0,\ QB_0 = \eta_0 - \eta_1,$$

onda je po glavnoj formuli za pravokutni trokut

$$\sin \Pi(p) = \sin \Pi(\eta_0 - \eta_1) \sin \Pi(q).$$

Po formulama za četverokut sa tri prava kuta, koje imamo u Engela na strani 347., možemo pisati

$$\sin \Pi(q) = \operatorname{tg} \Pi(\eta) \operatorname{cotg} \Pi(\eta_1),$$

dakle je

$$\sin \Pi(p) = \sin \Pi(\eta_0 - \eta_1) \operatorname{tg} \Pi(\eta) \operatorname{cotg} \Pi(\eta_1)$$

ili

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(\eta_0) \operatorname{tg} \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_1)}{1 - \cos \Pi(\eta_0) \cos \Pi(\eta_1)}.$$

Iz istoga onog četverokuta imamo

$$\cos \Pi(\eta_1) = \cos \Pi(\eta) \,.\, \sin \Pi(\xi_0 - \xi),$$

zato je napokon

Digitized by Google

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0) \sin \Pi(\xi_0 - \xi)}{1 - \cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0) \sin \Pi(\xi_0 - \xi)} \qquad (24)$$

jednadžba kruga s geodetskim središtem u $M_0\ (\xi_0, \eta_0)$ i s geodetskim polumjerom p. U drugoj oznaci može se to pisati

$$\operatorname{ch} p = \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \eta_0 \operatorname{ch}(\xi_0 - \xi) - \operatorname{sh} \eta \operatorname{sh} \eta_0.$$

Da razaberemo, čime je ovaj krug prikazan u Euklidovoj ravnini, riješit ćemo jednadžbu (24) po $\sin \Pi\ (\xi_0 - \xi)$, pa možemo pisati

$$\operatorname{ch}(\xi_0 - \xi) = \left[\cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0) + \frac{\sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0)}{\sin \Pi(p)} \right],$$

ili iza lagane transformacije

$$e^{2\xi} - 2e^{\xi_0} \cos \Pi(\eta_0) \cdot e^{\xi} \cos \Pi(\eta) - 2e^{\xi_0} \sin \Pi(\eta_0) \cdot e^{\xi} \sin \Pi(\eta) \cdot \frac{1}{\sin \Pi(p)} + e^{2\xi_0} = 0.$$

Po formulama (6) prijeđe to u

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y \operatorname{ch} p + x_0^2 + y_0^2 = 0$$

ili

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} p)^2 = y_0^2 \operatorname{sh}^2 p.$$

Povratimo se sada na krug s geodetskim središtem u Ω.

Kako ćemo nacrtati krug sa središtem u Ω i s polumjerom $\Omega P = p$? Tačka je P na $+\xi$, i sada treba na osi ξ načiniti $\Omega P = \Omega R$ i raspoloviti PR: polovište C Euklidovo je središte kruga, kojim je predočen ovaj krug Lobačevskoga.

Kako ćemo naći geodetsko središte zadanoga kruga? Treba raspoloviti PR; to se izvodi tako, da se konstruira geometrijska sredina među ordinatama ovih dviju tačaka P i R. Znamo, da je

$$O\Omega = \sqrt{OP \cdot OR} = OT.$$

Dakle će se geodetsko središte naći tako, da se iz O povuče tangenta OT na zadani krug; tom se tangentom onda opiše iz O luk, koji os ξ presijeca u Ω, t. j. u geodetskom središtu zadanoga kruga.

Tačke O i Ω harmonijski su pridruženi polovi s obzirom na ovaj krug. Doista je $\frac{P\Omega}{R\Omega} = -1$, jer je Ω polovište dužine PR, dok je $\frac{PO}{RO} = 1$, jer je $PO = \infty$, a tako je i RO.

Digitized by Google

Sistem ortogonalnih krugova temeljnoga kruga $A\Omega B$, kojim je predočena os η, prikazuje nam, u ovoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga, sistem koncentričnih krugova, jer oni svi imadu zajedničko geodetsko središte u Ω, a samo im se mijenja polumjer. Jednadžba je ovoga sistema

$$\sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) = \sin \Pi(p),$$

gdje je p parametar. Svezak krugova, koji prolaze tačkama

$$x = 0, \quad y = 0\Omega \quad \text{i} \quad x = 0, \quad y = -0\Omega,$$

a središta imadu na osi X, prikazuje dijametre onih koncentričnih krugova. Jednadžba je ovoga drugog sistema

$$\operatorname{tg} \Pi(\xi) \cos \Pi(\eta) = \operatorname{tg} A.$$

Ovo je naime jednadžba geodetskih linija, koje prolaze kroz Ω i s osju ξ zatvoraju kut A.

8. **Granični krug.** Uzmimo sada sistem krugova koncentričan u običnom značenju, pa potražimo njihova geodetska središta. Po konstrukciji se odmah razabira, kako se, kad polumjer kruga raste, geodetsko središte sve više odmiče od Euklidova središta i približava osi X. Kad polumjer postane neizmjerno velik u ovom načinu mjerenja, t. j. kad se krug dotakne osi X, geodetsko mu središte padne u samu os X. Tako dolazimo na granični krug, koji prolazi svojim geodetskim središtem O. Polumjeri su mu luci krugova, koji imadu svoja središta u osi X, a svi tangiraju os Y.

Granični je dakle krug u ovoj interpretaciji predočen krugom, koji tangira os X. Os toga graničnoga kruga neka je Y. Jednadžba će mu onda biti

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

ili

$$e^{\xi} - 2r \sin \Pi(\eta) = 0. \tag{25}$$

Uzmemo li $r = \frac{1}{2}$, dobivamo

$$e^{\xi} - \sin \Pi(\eta) = 0$$

za jednadžbu graničnoga kruga. Poradi geodetske refleksije ili, što je isto, transformacijom s pomoću reciprokih radija vektora prijeđe ovo u

Digitized by Google

$$e^{-\xi} - \sin \Pi(\eta) = 0, \qquad (26)$$

a to je također geodetski krug. Ova jednadžba dolazi u Engela na str. 27. Ovaj je geodetski krug predočen pravcem, koji tangira os η u ishodištu Ω (sl. 6). U pravokutnim mu je koordinatama jednadžba $y = 1$. Svaka paralela s osju X u ovoj je interpretaciji slika jednoga graničnog kruga. Refleksijom na osi η dobivamo drugi granični krug, koji mu odgovara. Granični kruzi iste vrste, koji imadu istu os, imadu i isto geodetsko središte; koncentrični su. Do jednadžbe graničnoga kruga, koji je predočen paralelom s osju X, možemo doći uzevši u jednadžbi

$$x^2 + [y - (a + r)]^2 = r^2$$

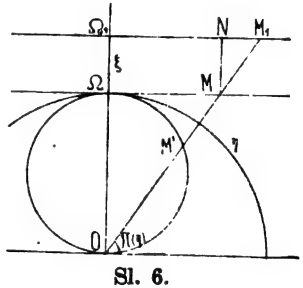
da je $r = \infty$. Ona se reducira na

$$y = a \quad \text{ili} \quad e^{\xi} \sin \Pi(\eta) = a$$

Do ova bismo dva graničnak ruga mogli doći i tako, da veličinu ξ jedan put računamo od tačke, u kojoj krug sa središtem u Ω presijeca pozitivnu stranu osi ξ, a drugi put od tačke, u kojoj taj krug presijeca negativnu stranu osi ξ, pa da uzmemo $r = \infty$.

Dijametri su ovoga drugog kruga paralele s osju Y.

Luk graničnoga kruga možemo lako odrediti. Uzmimo granični krug K predočen pravcem, koji os η tangira u tački Ω, i na njemu tačku $M(\xi, \eta)$. Iz pravokutnoga trokuta $O\Omega M$ dobivamo



Sl. 6.

$$s = \Omega M = \operatorname{cotg} \Pi(\eta).$$

Uzmimo drugi granični krug, predočen paralelom s osju X kroz tačku Ω_1. Iz sličnosti trokuta, koje tu dobijemo, uvjeravamo se, da je u ovoj interpretaciji $\Omega_1 M_1 = \Omega M$. Kako u izrazu za luk graničnoga kruga ne dolazi ξ, razabiramo, da će istom ovom formulom biti predočen i luk svakoga graničnoga kruga, dakle i onoga, koji se iz K dobije geodetskom refleksijom na osi η, a predočen je krugom, komu je dijametar $O\Omega$. To možemo i analitički naći. Jednadžba graničnoga kruga može se pisati

Digitized by Google

$$e^{\xi} \operatorname{ch} \eta - 2r = 0,$$

a odavle je

$$\frac{d\xi}{d\eta} = - \operatorname{th} \eta,$$

$$ds = d\eta \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \eta} = \operatorname{ch} \eta \, d\eta,$$

dakle

$$s = \operatorname{sh} \eta = \operatorname{cotg} \Pi(\eta).$$

Taj se luk javlja na slici u pravoj veličini, jer je za njegove tačke $y = 1$. Tačkom M povucimo paralelu s osju ξ. Ova os i ova paralela odsijecaju na onom drugom graničnom krugu, koji je predočen paralelom s osju X kroz Ω_1, dužinu $\Omega_1 N$, i sada je

$$\Omega_1 N = \frac{\Omega M}{O\Omega},$$

a kako je $O\Omega = e^{\xi}$, može se ovo pisati

$$s' = se^{-\xi}.$$

U Engela je na strani 274. pokazano, kako se s pomoću ovoga može odrediti površina sektora graničnoga kruga.

9. **Ekvidistantna linija.** Uzmimo isti onaj sustav koncentričnih krugova, kao na početku tačke 8., pa ogledajmo one njegove krugove, koji sijeku os X. Geodetska su središta ovakvih krugova imaginarna. Tako dolazimo do treće vrste krugova u ravnini L_2.[1] To su ekvidistantne linije, kojima je medijana dana jednadžbom

$$\xi = C.$$

Potražimo jednadžbu ekvidistantne linije, kojoj je medijana os η. Tu treba naći zamotaljku kruga

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} p)^2 = y_0^2 \operatorname{sh}^2 p,$$

kojemu se središte miče po osi η, t. j. koordinate središta vezane su relacijom

$$x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

[1] F. Hausdorff: Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie. Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig 1899 str. 172. — zove te tri vrste ovako: Kreis (Cyklus), Linie gleichen Abstandes = Ueberkreis (Hypercyklus), Grenzkreis (Paracyklus).

Digitized by Google

Jednadžbu onoga kruga možemo pisati također

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y \operatorname{ch} p + 1 = 0$$

ili

$$[(x^2 + y^2 + 1) - 2x_0 x]^2 = 4y^2 \operatorname{ch}^2 p \,(1 - x_0^2).$$

Kad ovo derivujemo po x_0, dobivamo

$$x_0 = \frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2\operatorname{ch}^2 p)},$$

a to uvršteno u prethodnu jednadžbu dade, kad se pokrati,

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 = 4(x^2 + y^2 \operatorname{ch}^2 p)$$

ili

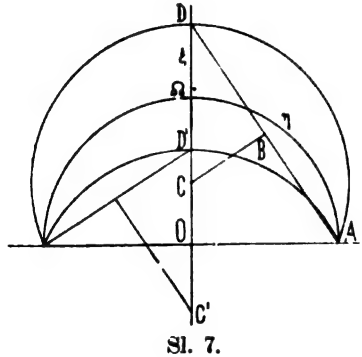
$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4y^2 \operatorname{sh}^2 p = 0.$$

Rastavimo li izraz na lijevoj strani u faktore, razabrat ćemo, da se ekvidistantna linija sastoji od dva kruga

$$x^2 + y^2 - 2y \operatorname{sh} p - 1 = 0$$

i $x^2 + y^2 + 2y \operatorname{sh} p - 1 = 0.$

Ove jednadžbe možemo geometrijski dobiti ovako. Krug, kojim je predočena ta ekvidistantna linija, ide tačkom D, jer je $\Omega D = p$, i ujedno tačkom A; središte mu je na osi ξ u C. Sada je



Sl. 7.

$$OD = e^p = \operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p.$$

Dalje je

$$AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{1 + e^{2p}}.$$

Kako je

$$CD : BD = AD : OD, \quad BD = \frac{1}{2} AD,$$

imamo

$$CD = \operatorname{ch} p,$$

dok je

$$OC = OD - CD = \operatorname{sh} p.$$

Digitized by Google

Ekvidistantna je linija predočena krugom, komu je središte u $(0, \operatorname{sh} p)$, a polumjer mu je $\operatorname{ch} p$. Jednadžba mu je

$$x^2 + y^2 - 2y \operatorname{sh} p - 1 = 0$$

ili

$$e^{2\xi} - \frac{2e^{\xi}}{\operatorname{ch} \eta} \operatorname{sh} p = 1.$$

To se dade pisati

$$\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \eta = \operatorname{sh} p,$$

a u drugoj oznaci

$$\operatorname{tg} \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) = \operatorname{tg} \Pi(p). \tag{27}$$

Za drugi dio ekvidistantne linije dobili bismo na isti način

$$OD' = e^{-p}, \quad C'D' = \operatorname{ch} p, \quad OC' = \operatorname{sh} p.$$

To je dakle krug sa središtem u $(0, -\operatorname{sh} p)$ i s polumjerom $\operatorname{ch} p$.

Da dobijemo ekvidistantnu liniju, kojoj je medijana os ξ, potražit ćemo zamotaljku krugova predočenih jednadžbom

$$x^2 + y^2 - 2y_0 y \operatorname{ch} p + y_0^2 = 0,$$

u kojoj je y_0 parametar. Dobivamo

$$x^2 - y^2 \operatorname{sh}^2 p = 0$$

t. j. ta je ekvidistantna linija predočena pravcima

$$y = \frac{1}{\operatorname{sh} p} x, \quad y = -\frac{1}{\operatorname{sh} p} x$$

ili

$$y = x \operatorname{tg} \Pi(p), \quad y = -x \operatorname{tg} \Pi(p). \tag{28}$$

Na osnovi formula (6), a i direktno iz slike razabiramo, da se u geodetskim koordinatama ove jednadžbe mogu pisati

$$\eta = p, \quad \eta = -p.$$

Ovi pravci zatvoraju s osju X kutove jednake kutovima paralelnosti, koji odgovaraju stalnoj udaljenosti p i $-p$.

Bez obzira na ovu interpretaciju geometrije Lobačevskoga možemo jednadžbe ekvidistantnih linija naći ovako. Jednadžba kruga, komu je središte na osi ξ, jest

Digitized by Google

$$\operatorname{ch} p = \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} (\xi_0 - \xi);$$

derivujmo po ξ_0 i eliminirajmo ξ_0, pa ćemo dobiti odmah

$$p = \eta.$$

Krug, komu je središte na osi η, ima jednadžbu

$$\operatorname{ch} p = \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \eta_0 - \operatorname{sh} \eta \operatorname{sh} \eta_0,$$

a kad se iz ove jednadžbe i njezine derivacije po η_0 eliminira η_0, izađe

$$\operatorname{sh} p = \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \eta.$$

10. **Specijalna jedna transformacija.** Sada ćemo ogledati transformaciju, kod koje se ne mijenja apscisa zadane tačke, dok su kutovi paralelnosti, što pripadaju ordinatama tačaka, koje korespondiraju, komplementni. Ta je transformacija određena jednadžbama

$$\xi = \xi_1, \quad \Pi(\eta) + \Pi(\eta_1) = \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Ova je transformacija poznata već u literaturi[1]; ovdje ćemo pokazati, kakvo joj jednostavno značenje pripada u ovoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga, a i generalizirat ćemo je, da bude vrijedila u cijeloj ravnini. Znademo i vidjeli smo na sl. 3., kako se konstruira kut paralelnosti, koji odgovara dužini a odmjerenoj na osi η; zato ćemo odmah iz ove slike moći razabrati, kako bismo konstruirali $\Pi(\eta_1) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\eta)$, t. j. kako bismo odredili tačku M_1, koja odgovara tački M. Povučemo li pravac $y = x$, vidimo, da se ova transformacija svodi na običnu refleksiju na ovom pravcu; lik $F(x, y) = 0$ transformira se u $F(y, x) = 0$. U ostalom razabiramo to i s pomoću formula (6), da x prijeđe u y i obrnuto, kad se $\Pi(\eta)$ zamijeni komplementnom vrijednošću. Označimo li ovu transformaciju sa S, to je $S^2 = 1$; transformacija je involutorna. Prema temeljnoj relaciji među dužinom okomice i kutom paralelnosti, koji joj odgovara, možemo ovu transformaciju pisati u obliku

[1] H. Liebmann: Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig 1901., str. 483.

Digitized by Google

$$\xi = \xi_1\,,\quad 2\operatorname{arc\,tg} e^{-\eta} + 2\operatorname{arc\,tg} e^{-\eta_1} = \frac{\pi}{2}.$$

Dalje je

$$\operatorname{arc\,tg} e^{-\eta_1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} e^{-\eta} = \operatorname{arc\,th} \frac{\eta}{2},$$

pa je dakle

$$e^{-\eta_1} = \operatorname{th} \frac{\eta}{2};$$

zato (29) možemo još pisati ovako

$$\xi = \xi_1\,,\quad \eta = 2\operatorname{arc\,th} e^{-\eta_1}. \tag{30}$$

Iz

$$\eta_1 = -\log \operatorname{th} \frac{\eta}{2}$$

razabiramo, da je η_1 realno, dok je η pozitivno. Ovom se dakle transformacijom ne može s pozitivne polovine ravnine (ξ, η) prijeći na negativnu; ova transformacija vrijedi samo za tačke u pozitivnoj polovini ravnine. Zato ćemo odrediti analognu transformaciju za negativnu polovinu ravnine. Znademo, da je

$$\Pi(-\eta) = \pi - \Pi(\eta),\ \Pi(-\eta_1) = \pi - \Pi(\eta_1),$$

dakle

$$\Pi(-\eta) + \Pi(-\eta_1) = \frac{3}{2}\pi,$$

stoga će

$$\xi = \xi_1\,,\quad \Pi(\eta) + \Pi(\eta_1) = \frac{3}{2}\pi \tag{31}$$

biti analogna transformacija, koja vrijedi u negativnoj poli ravnine (ξ, η). Interpretirati je možemo kao refleksiju na pravcu $y = -x$, kako se iz slike direktno uvjeravamo. Za nju je

$$e^{-\eta_1} = -\operatorname{cth} \frac{\eta}{2},$$

dakle se njom ne može prijeći na pozitivni dio ravnine.

U ostalom se ove dvije transformacije dadu stegnuti u jedno. Znamo, da

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{\sin \eta u}{u}\, du$$

ima vrijednost $\frac{\pi}{2}$, ako je η pozitivno, a $-\frac{\pi}{2}$, ako je η negativno. Kako η i η_1 imadu isti znak, mogu se (29) i (31) stegnuti u

$$\xi = \xi_1, \quad \Pi(\eta) + \Pi(\eta_1) = \arcsin \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \eta u}{u}\, du.$$

Resultati ove transformacije, kad je shvatimo kao refleksiju na pravcima $y = x$ i $y = -x$, postaju sad očigledni. Os ξ transformira se u os X, t. j. u neizmjerno udaljeni pravac; os η transformira se sama u sebe. Tako se isto ne mijenjaju kod ove transformacije geodetske linije $\xi = \text{const.}$, ni krugovi, kojima su središta na pravcu $y = x$, kao ni granični krugovi, koji tangiraju os ξ. Pođimo da ispitamo, u što prijeđe paralela s negativnom stranom osi ξ. Neka ta paralela na osi η odsijeca dužinu b. Na slici je ta paralela predočena lukom OB. Luk simetričan s ovim lukom s obzirom na pravac $y = x$ luk je graničnoga kruga, koji os X tangira u tački O, i to onaj dio graničnoga kruga, koji leži u pozitivnoj poli ravnine (ξ, η). Paralela prema osi $-\xi$ transformira se dakle u granični krug. Da se dobije cijeli granični krug, valjalo bi još uzeti i onu paralelu s negativnom stranom osi ξ, koja na osi η odsijeca dužinu $-b$.

Po (7) jednadžba je prve paralele

$$\cos \Pi(\eta) = e^{\xi} \cos \Pi(b),$$

a kad ovo transformiramo po (29), dobit ćemo

$$\sin \Pi(\eta_1) = e^{\xi_1} \cos \Pi(b),$$

a ovo je jednadžba graničnoga kruga. Taj je granični krug u ovoj interpretaciji predočen kao krug sa središtem u S i s polumjerom

$$r = OS = \frac{1}{2 \cos \Pi(b)},$$

kako se vidi iz slike, koju je lako nacrtati.

Digitized by Google

Paralele s pozitivnom stranom osi ξ transformiraju se u granične krugove predočene pravcima $y = \text{const.}$

Dva pravca, koji se sijeku (kao i oni, koji se ne sijeku), imadu u L_2 četiri zajedničke paralele. Ako hoćemo da potražimo paralele zajedničke osima ξ i η, treba da ogledamo paralele sa

$$-\xi\,\mathrm{i}+\eta,\quad -\xi\,\mathrm{i}-\eta,\quad +\xi\,\mathrm{i}+\eta,\quad +\xi\,\mathrm{i}-\eta.$$

Njihove su jednadžbe po redu

$$\begin{aligned} e^{\xi} &- \cos\Pi(\eta) = 0,\\ e^{\xi} &+ \cos\Pi(\eta) = 0,\\ e^{-\xi} &- \cos\Pi(\eta) = 0,\\ e^{-\xi} &+ \cos\Pi(\eta) = 0. \end{aligned}$$

Prva i treća paralela leže u pozitivnom dijelu ravnine (ξ, η), zato ćemo na njih primijeniti transformaciju (29); druga i četvrta leže u negativnom dijelu, zato ćemo na njih primijeniti transformaciju (31). Tako ćemo dobiti, da se prva i druga paralela transformiraju u granični krug

$$e^{\xi_1} - \sin\Pi(\eta_1) = 0,$$

a on je u ovoj interpretaciji predočen krugom, koji ima $O\Omega$ za premjer; treća pak i četvrta dadu granični krug

$$e^{-\xi_1} - \sin\Pi(\eta_1) = 0$$

predočen pravcem, koji os η tangira u ishodištu Ω. Ova se dva granična kruga mogu jedan iz drugoga dobiti geodetskom refleksijom na osi η; u istoj su srodnosti prva i treća paralela, a tako isto druga i četvrta. Svaka paralela daje samo polovinu graničnoga kruga, koji joj odgovara, i to onu, koja s njom leži u istom dijelu ravnine (ξ, η). Kad bismo ove paralele doista nacrtali, dobili bismo ove resultate na prvi pogled.

Uzmimo sada pravac, koji prolazi ishodištem Ω i os ξ siječe pod kutom A. Jednadžba mu je

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}\Pi(\xi)\cos\Pi(\eta);$$

Digitized by Google

transformacijom (29) prijeđe on u

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \Pi(\xi_1) \sin \Pi(\eta_1),$$

a kad ovo isporedimo sa (27), vidimo, da je to ekvidistantna linija, kojoj je medijana os η. Samo moramo uzeti, da je p ona dužina, koja odgovara kutu paralelnosti A.

Ovaj pravac, što smo ga sada uzeli, leži dijelom u pozitivnoj, a dijelom u negativnoj polovini ravnine (ξ, η). Ekvidistantna linija, što smo je sada dobili, slika je onoga dijela pravca, koji je u pozitivnoj polovini ravnine. Zato se i od ove ekvidistantne linije ima uzeti samo onaj dio, koji je u pozitivnoj polovini ravnine (ξ, η). Na onaj dio pravca, što je u negativnoj poli ravnine, moramo primijeniti transformaciju (31), pa dobijemo

$$\operatorname{tg} (\pi - A) = \operatorname{tg} \Pi(\xi_1) \sin \Pi(\eta_1).$$

Kutu paralelnosti $\pi - A$ ili $\pi - \Pi(p)$ pripada dužina $-p$, dakle je ovo jednadžba ekvidistantne linije, koja je s prvom simetrična s obzirom na os η. Uzeti se ima samo onaj njezin dio, koji je u negativnoj polovini ravnine (ξ, η). Drugu bismo polovinu jedne i druge ekvidistantne linije dobili, kad bismo uzeli još pravac, koji je sa zadanim pravcem simetričan s obzirom na os ξ, pa ga ovako transformirali. Na slici se mogu ovi resultati direktno očitati.

Uzmimo još pravac, koji u udaljenosti b od ishodišta Ω presijeca os ξ pod kutom A. Njegova je jednadžba

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \Pi(\xi - b) \cos \Pi(\eta).$$

Ako mu transformiramo onaj dio, koji leži u pozitivnoj polovini ravnine, dobivamo

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \Pi(\xi_1 - b) \sin \Pi(\eta_1).$$

Da nađemo geometrijsko značenje ove jednadžbe, izrazit ćemo $\operatorname{tg} \Pi(\xi_1 - b)$ s pomoću eksponencijalne funkcije, pa ćemo dobiti mjesto prethodne jednadžbe relaciju

$$e^{2\xi_1} - e^{2b} - 2e^{\xi_1 + b} \cdot \frac{\sin \Pi(\eta_1)}{\operatorname{tg} A} = 0$$

ili

Digitized by Google

$$x^2 + y^2 - \frac{2y\,e^b}{\operatorname{tg} A} - e^{2b} = 0,$$

a ovo je jednadžba kruga, komu je središte u $\left(0, \frac{e^b}{\operatorname{tg} A}\right)$, a polumjer mu je jednak $\frac{e^b}{\sin A}$. Dakle ona jednadžba predočuje ekvidistantnu liniju, kojoj je medijana geodetska linija $\xi = b$; medijana je normala na os ξ u onoj tački, u kojoj zadani pravac siječe os ξ.

Da nađemo apscisu presjeka ove ekvidistantne linije s osju ξ, moramo uzeti $\eta = 0$, $\sin \Pi(\eta) = 1$, pa onda dobijemo iz posljednje jednadžbe na prethodnoj strani, kad je riješimo po e^{ξ_1}

$$\xi_1 = b + \log \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

dakle je stalna udaljenost tačaka ekvidistantne ove linije od medijane $\xi = b$ dana relacijom

$$p = \log \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

t. j. p je dužina, koja pripada kutu paralelnosti A. Iz ovoga razabiramo također, da se os ξ transformira u neizmjerno udaljen pravac, jer za $A = 0$ imamo $p = \infty$; geodetske linije $\xi = c$ ostaju neizmijenjene, jer za $A = 90^0$ imamo $p = 0$.

Ekvidistantne linije, kojima je medijana os ξ, transformiraju se u ekvidistantne linije iste vrste, kako se razabira iz jednadžbe $\eta = p$ ili još laglje iz slike. Tu imamo pravce kroz ishodište 0, a oni refleksijom na $y = x$ prelaze u isto take pravce.

Pravac, koji na osi η odsijeca dužinu b i na njoj stoji okomito, ima jednadžbu

$$\cos \Pi(\eta) \sin \Pi(\xi) = \cos \Pi(b),$$

koja će ovom transformacijom prijeći u

$$\sin \Pi(\eta_1) \sin \Pi(\xi_1) = \cos \Pi(b).$$

Ovo je krug, komu je geodetsko središte u Ω. Ako mu polumjer označimo sa p, onda je

Digitized by Google

$$\Pi(p) + \Pi(b) = \frac{\pi}{2}.$$

Sistem pravaca ortogonalnih na os η transformira se u sistem koncentričnih krugova sa zajedničkim geodetskim središtem Ω.

Pravac (10), koji os η siječe pod kutom A i na njoj odsijeca dužinu b, transformira se u krug

$$2 \sin \Pi(\eta_1) \sin A = e^{\xi_1} \sin [A + \Pi(b)] + e^{-\xi_1} \sin [A - \Pi(b)].$$

Taj je krug s gledišta Euklidove geometrije predočen krugom, komu je središte u

$$x = 0, \quad y = \frac{\sin A}{\sin [A + \Pi(b)]},$$

dok mu je polumjer

$$r = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin [A + \Pi(b)]}.$$

Krug sa središtem u $M_0 (x_0, y_0)$ i s polumjerom p ima jednadžbu

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} p)^2 = y_0^2 \operatorname{sh}^2 p;$$

kako je ova transformacija refleksija na pravcu $y = x$, vidimo, da će se ovaj krug transformirati u krug

$$(x - y_0 \operatorname{ch} p)^2 + (y - x_0)^2 = y_0^2 \operatorname{sh}^2 p.$$

U kom je snošaju prvi krug prema osi Y, u tom je istom snošaju ovaj drugi krug prema osi X. Tako lako razabiramo, da će se krug, koji tangira os Y ili — što je isto — os ξ, transformirati u krug, koji tangira os X; dakle u granični krug. Krug, koji siječe os ξ, transformira se u ekvidistantnu liniju ili u pravac prema tomu, da li se središte kruga ne nalazi na osi ξ ili se nalazi na njoj. U svakom drugom slučaju dobivamo ovom transformacijom iz kruga opet krug. Ekvidistantne se linije mogu transformirati po tom u krugove, koji sijeku os ξ, ili u pravce, koji je također sijeku.

11. **Geodetska linija u hiperbolnom prostoru.** Prijeđimo sada na geometriju u prostoru. Za element luka uzet ćemo

Digitized by Google

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2},$$

dakle je

$$s = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}}{z}\, dz.$$

Ako hoćemo da odredimo najkraću liniju između dvije tačke M_0 i M_1 u prostoru, u kom je ovakav izraz za dužinu luka, dolazimo do Lagrangeovih jednadžbi

$$X - X'_1 = 0, \quad Y - Y'_1 = 0.$$

Kako u podintegralnoj funkciji ne dolaze eksplicite x i y, to je

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

pa nam ostaje

$$X'_1 = \frac{d}{dz} \frac{x'}{z\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = 0,$$

$$Y'_1 = \frac{d}{dz} \frac{y'}{z\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = 0.$$

Prema tomu je

$$\frac{x'}{z\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = c,$$

$$\frac{y'}{z\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = c_1.$$

Ovo su diferencijalne jednadžbe tražene krivulje, a iz njih se dobiva

$$y' = \frac{c_1}{c} x',$$

napokon

$$y = \frac{c_1}{c} x + c_2.$$

Ova nam jednadžba kazuje, da se tražena krivulja nalazi u ravnini normalnoj na ravninu (x, y). Da bolje upoznamo tu krivulju, uzet ćemo tu ravninu za ravninu (x, z). Onda je $y = 0$, jer spo-

Digitized by Google

menuta krivulja leži sva u ovoj ravnini, a također je i $y' = 0$; tako će nam ostati samo jednadžba

$$\frac{x'}{z\sqrt{1+x'^2+y'^2}} = c$$

ili

$$dx = \frac{c\,z\,dz}{\sqrt{1-c^2z^2}},$$

dakle

$$(x-c_2)^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Ovo je krug sa središtem u osi X. Os X mijenja svoj položaj prema tomu, kako su položene one dvije tačke, kojima ima da prođe ova najkraća linija.

No može se raditi i tako, da se najprije vrijednost za y', a onda za x', uvrsti u makar koju jednadžbu gornjega sustava. Onda se dobije

$$x^2(c^2+c_1^2)^2 + c^2(c^2+c_1^2)z^2 = c^2 + c_2,$$
$$y^2(c^2+c_1^2)^2 + c_1^2(c^2+c_1^2)z^2 = c_1^2 + c_3.$$

Ove se četiri konstante c, c_1, c_2, c_3 mogu odrediti poradi uvjeta, što presjek ovih ploha imade prolaziti tačkama M_0 i M_1. Kad bismo pustili, da M_0 padne u ishodište koordinata, našli bismo, da se Jacobijeva kritična determinanta poništava samo u ishodištu. Pomoćna je ploha ovdje

$$F = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{z},$$

a budući da je vazda

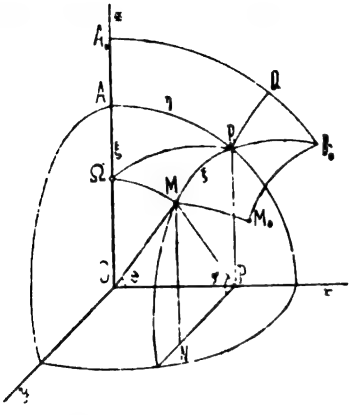
$$F_{pp}\,F_{qq} - F_{pq}^2 = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{(1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$
$$F_{pp} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

uvjeravamo se, da je ispunjen uvjet za jaki minimum.

Dvije polukugle, kojima su središta u ravnini (x, y), sijeku se vazda u ovakoj geodetskoj liniji; zato ćemo ovake polukugle uzimati kao ravnine hiperbolnoga prostora.

Digitized by Google

12. **Pravokutne koordinate.** Da možemo dalje, treba da uvedemo prostorne geodetske koordinate. To ćemo učiniti analogno, kako je Lahtin učinio u ravnini. Uzmimo prostorni pravokutni sustav koordinatâ. Iz tačke M spustimo okomicu MN na ravninu (x, y) i MP na os X. Kut radija vektora OM i osi X označit ćemo sa ϑ, a kut ravnine OMP prema ravnini (x, y) sa φ. Onda je



Sl. 8.

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta\cos\varphi.$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Za diferencijal luka dobit ćemo izraz

$$ds = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}}{r\sin\vartheta\sin\varphi}.$$

Oko ishodišta O kao središta opišimo kuglu s polumjerom 1 i uzmimo onaj dio njezin, koji je iznad (x, y). Pozitivni dio osi Z uzet ćemo za os ξ, presjek polukugle sa (x, z) za os η, a presjek njezin sa (y, z) za os ζ. Još ćemo presjek osi Z s ovom polukuglom označiti sa Ω, i to će biti ishodište geodetskih koordinata. Ako je sada dana tačka $M(x, y, z)$, položit ćemo njom polukuglu koncentričnu s onom prvom polukuglom. Neka ova polukugla presijeca os ξ u tački A; onda ćemo uzeti $\Omega A = \xi$. Položimo još tačkom M ravninu normalnu na (x, y). Luk geodetske linije, što je ova ravnina isijeca na kugli, neka (x, z) probija u B; luk je $MB = \zeta$, dok ćemo uzeti $AB = \eta$.

Sada treba geodetske koordinate tačke M izraziti s pomoću njenih pravokutnih koordinata.

Da odredimo ξ, moramo uzeti $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, pa je tako

$$ds = \frac{dr}{r},$$

dakle je

Digitized by Google

$$\xi = \int_1^r \frac{dr}{r} = \log r = \log \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Da odredimo AB, treba uzeti

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad r = \text{const.},$$

pa će ostati

$$ds = \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Tako je

$$\eta = \int_{\vartheta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = -\log \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \quad \text{i} \quad e^{\eta} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}.$$

Napokon treba staviti $r = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$, pa je

$$ds = \frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

dakle

$$\zeta = -\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad e^{\zeta} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Iz trokuta OMP vidimo još, da je

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{z^2+y^2}}{x},$$

dok je iz trokuta MNP

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{y}.$$

Kad $\operatorname{tg}\vartheta$ i $\operatorname{tg}\varphi$ izrazimo s pomoću tangensa polovice kutova, dobivamo

$$e^{2\xi} = x^2+y^2+z^2,$$

$$\operatorname{sh}\eta = \frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}},$$

Digitized by Google

$$\operatorname{sh}\zeta = \frac{y}{z}.$$

Da pravokutne koordinate izrazimo s pomoću geodetskih koordinata, postupat ćemo ovako. Kvadrirajmo drugu od prethodnih jednadžbi i pribrojmo joj jedinicu, pa će izaći

$$\operatorname{ch}^2\eta = \frac{e^{2\xi}}{e^{2\xi} - x^2},$$

a odavle je

$$x = e^{\xi} \operatorname{th}\eta.$$

Tako se isto dobije

$$\operatorname{ch}^2\zeta = \frac{y^2 + z^2}{z^2}.$$

Kad iz prve jednadžbe uzmemo vrijednost za brojnik ovoga razlomka, dobit ćemo

$$z^2 \operatorname{ch}^2\zeta = e^{2\xi} - x^2,$$

a kad se ovdje za x uzme nađena vrijednost, izađe

$$z = \frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\zeta}.$$

S pomoću ovoga i s pomoću treće jednadžbe iz gornjega sistema možemo pisati

$$y = \frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch}\eta} \operatorname{th}\zeta.$$

Ove izraze za x, y, z, možemo predočiti također u obliku

$$\begin{aligned} x &= e^{\xi} \cos \Pi(\eta), \\ y &= e^{\xi} \sin \Pi(\eta) \cos \Pi(\zeta), \\ z &= e^{\xi} \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta). \end{aligned} \tag{32}$$

Diferenciramo li gornje izraze, izađe

$$dx = e^{\xi} \operatorname{th}\eta\, d\zeta + e^{\xi} \frac{d\eta}{\operatorname{ch}\eta},$$

Digitized by Google

$$dy = -\frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch}\eta}\operatorname{th}\zeta\, d\xi - \frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch}^2\eta}\operatorname{sh}\eta\operatorname{th}\zeta\, d\eta + \frac{e^{\xi}\, d\zeta}{\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}^2\zeta},$$

$$ds = \frac{e^{\xi}\, d\xi}{\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\zeta} - \frac{e^{\xi}\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}^2\eta\operatorname{ch}\zeta}\, d\eta - \frac{e^{\xi}\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}^2\zeta}\, d\zeta.$$

Kad se ovo kvadrira i zbroji, dobije se

$$dx^2 + dy^2 + ds^2 = e^{2\xi} d\xi^2 + \frac{e^{2\xi}}{\operatorname{ch}^2\eta}\, d\eta^2 + \frac{e^{2\xi}}{\operatorname{ch}^2\eta\operatorname{ch}^2\zeta}\, d\zeta^2,$$

jer se podvojni produkti među sobom ponište. Još treba ovo podijeliti sa s^2, i tako izađe izraz za diferencijal luka u geodetskim koordinatama

$$ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta\operatorname{ch}^2\zeta\, d\xi^2 + \operatorname{ch}^2\zeta\, d\eta^2 + d\zeta^2}.$$

Uzmimo jednu tačku $M(\xi, \eta, \zeta)$ i pustimo, da se u izrazu ds mijenja najprije samo ξ, onda samo η i napokon samo ζ, tako ćemo dobiti dužine

$$\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\zeta\, d\xi, \quad \operatorname{ch}\zeta\, d\eta, \quad d\zeta,$$

koje možemo uzeti za bridove elementarnoga paralelepipeda. Volumen mu je

$$dv = \operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}^2\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ili u drugoj oznaci

$$dv = \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sin\Pi(\eta)\sin^2\Pi(\zeta)}.$$

Ovaj izraz za element volumena nalazi se u Engela na str. 52.

13. **Kugla i granična kugla.** Uzmimo istu oznaku, kao u početku tačke 12., i pogledajmo sliku 8. Tačka M neka je na kugli, kojoj je geodetsko središte u ishodištu Ω. Povucimo još geodetske linije $\Omega B = p$ i $\Omega M = r$. Onda imamo dva pravokutna trokuta, naime ΩAB s pravim kutom kod A i ΩMB s pravim kutom kod B. Iz prvoga je trokuta

$$\sin\Pi(p) = \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta),$$

a iz drugoga je

$$\sin\Pi(r) = \sin\Pi(p)\sin\Pi(\zeta),$$

Digitized by Google

pa tako je

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta) \qquad (33)$$

jednadžba kugle s geodetskim središtem u Ω i s polumjerom r.

Da vidimo, čim je ova kugla predočena s gledišta Euklidove geometrije, pisat ćemo tu jednadžbu

$$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \zeta,$$

a odatle je

$$e^{2\xi} + 1 - \frac{2e^{\xi} \operatorname{ch} r}{\operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \zeta} = 0.$$

Poradi toga, što je $e^{2\xi} = x^2 + y^2 + z^2$

i

$$\frac{e^{\xi}}{\operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \zeta} = z,$$

može se to pisati

$$x^2 + y^2 + (z - \operatorname{ch} r)^2 = \operatorname{sh}^2 r.$$

To je kugla sa središtem u $S(0, 0, \operatorname{ch} r)$ i s polumjerom $\operatorname{sh} r$.

Kad bismo u jednadžbi (33) uzeli r kao parametar, dobili bismo sistem geodetski koncentričnih kugala, koje ortogonalno sijeku osnovnu polukuglu (ζ, η). Kad r postane beskonačno velik, dobijemo graničnu kuglu, kojoj ćemo jednadžbu sada potražiti.

Neka kugla, predočena jednadžbom (33), pozitivnu stranu osi ξ presijeca u tački U. Računamo li od ove tačke veličinu ξ, moramo u (33) pisati $r - \xi$ mjesto ξ, pa dobijemo

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(r - \xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta);$$

no kako je

$$\sin \Pi(r \pm \xi) = \frac{\sin \Pi(r) \sin \Pi(\xi)}{1 \pm \cos \Pi(r) \cos \Pi(\xi)},$$

prijeđe prethodna jednadžba u

$$1 - \cos \Pi(r) \cos \Pi(\xi) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta).$$

Za $r = \infty$ znamo, da je $\Pi(r) = 0$, pa tako ostane

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(\xi) = \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta)$$

ili

$$e^{\xi} = \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta). \qquad (34)$$

Ovo je jednadžba granične kugle. Na temelju posljednje između jednadžbi (32) vidimo, da je ovo

$$z = 1,$$

t. j. da je u ovoj interpretaciji ta granična kugla predočena ravninom, koja je paralelna s ravninom (x, y) i od nje udaljena za „1".

Mjesto tačke U možemo uzeti tačku V, u kojoj naša kugla (33) presijeca negativnu stranu osi ξ. Računamo li veličinu ξ od ove tačke, moramo u (33) pisati $\xi + r$ mjesto ξ, dakle

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(r + \xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta),$$

a to se dadę transformirati, kao i gore, u

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Pi(\xi) = \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta)$$

ili

$$e^{\xi} = \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta). \qquad (35)$$

Pomnožimo sa e^{ξ}, pa će izaći

$$e^{2\xi} - e^{\xi} \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta) = 0$$

ili

$$x^2 + y^2 + z^2 - z = 0.$$

Iz toga razabiramo, da je ova granična kugla predočena kuglom, koja ravninu (x, y) tangira u O i imade promjer $= 1$. U ostalom možemo odmah reći, da će u ovoj interpretaciji svaka kugla, koja tangira ravninu (x, y), predočivati jednu graničnu kuglu, a isto tako i svaka ravnina paralelna sa (x, y).

Ravnina (x, z) presijeca granične kugle (34) i (35) u dva granična kruga (vidi sl. 6). Prvi je od njih predočen pravcem kroz Ω, koji je paralelan s osju X; jednadžba mu je

$$e^{\xi} = \sin \Pi(\eta).$$

Digitized by Google

Uzmimo na tom pravcu tačku $M(\xi, \eta)$; onda je

$$\Omega M = \operatorname{cotg} \Pi(\eta).$$

Krug sa središtem u Ω i s polumjerom ΩM jedan je dio površine granične kugle; površina mu je

$$p = \Pi \operatorname{cotg}^2 \Pi(\eta),$$

a po jednadžbi graničnoga kruga može se to pisati[1]

$$p \quad \Pi(e^{2\xi} - 1).$$

Ove su dvije granične kugle jedna prema drugoj kao slika i predmet s obzirom na osnovnu polukuglu (ζ, η); jednadžba (34) prijeđe u (35), kad se ξ uzme negativno. S gledišta pak Euklidove geometrije jedna se granična kugla dobije iz druge transformacijom s pomoću reciprokih radija vektora. Uzmimo na prvoj graničnoj kugli tačku $M(\xi, \eta, \zeta)$; na drugoj graničnoj kugli odgovara joj tačka $M'(-\xi, \eta, \zeta)$. Ako su r i r' radiji vektori dviju tačaka, koje su u srodnosti inversije s obzirom na (ζ, η), onda je

$$rr' \quad 1.$$

Kako je

$$\xi \quad \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \log r,$$

mora biti

$$\xi' \quad -\xi.$$

Da ove dvije tačke M i M' imadu isto η i ζ, razabiramo lako iz slike; pripadaju im naime u polarnim koordinatama isti kutovi φ i ϑ.

Dakle je inversija na polukugli (ζ, η) doista refleksija u ovom načinu mjerenja.

Slika onoga kruga sa središtem u Ω i s polumjerom ΩM jest kalota granične kugle (35). Visina je ove kalote ξ, i tako smo za površinu kalote našli onaj izraz, koji daje Lobačevski na str. 43. spomenutoga djela.

Sada ćemo potražiti jednadžbu kugle u općenom položaju. Neka je središte kugle u $M_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, polumjer neka joj

[1] Engel-Lobatschefskij str. 43.

Digitized by Google

je r. a $M(\xi, \eta, \zeta)$ neka je jedna tačka te kugle. Uvedimo ove oznake (sl. 8.):

$$\Omega A = \xi, \quad AB = \eta, \quad BM = \zeta;$$
$$\Omega A_0 = \xi_0, \quad A_0B_0 = \eta_0, \quad B_0M_0 = \zeta_0, \quad BB_0 = p, \quad MM_0 = r.$$

Ovdje imademo dva četverokuta sa dva prava kuta. To je četverokut AA_0B_0B, koji leži u ravnini xz, i četverokut MBB_0M_0. Stranice MB i M_0B_0 ovoga četverokuta stoje normalno na ravnini xz. Kugla, na kojoj leže ove dvije geodetske linije, ima svoje središte u osi X; a kako je geodetska linija jednoznačno određena dvjema tačkama, ležat će geodetske linije BB_0 i MM_0 na istoj toj kugli, i tako četverokut MBB_0M_0 možemo u ovoj interpretaciji doista držati ravnim četverokutom. Kad bismo htjeli naći jednadžbu kugle u općenom položaju, bez obzira na ovu interpretaciju, uzeli bismo na pomoć poučak, da i u geometriji Lobačevskoga dva pravca, koji su okomiti na jednoj ravnini, određuju ravninu.

Kao u tački 7., tako ćemo i ovdje iz četverokuta AA_0B_0B dobiti

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(\xi_0 - \xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0)}{1 - \sin \Pi(\xi_0 - \xi) \cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0)},$$

dok je iz drugoga četverokuta MBB_0M_0 na isti način

$$\sin \Pi(r) = \frac{\sin \Pi(\zeta) \sin \Pi(\zeta_0) \sin \Pi(p)}{1 - \cos \Pi(\zeta) \cos \Pi(\zeta_0) \sin \Pi(p)}.$$

Kad u ovaj izraz uvrstimo prethodnu vrijednost za $\sin \Pi(p)$, bit će

$$\sin \Pi(r) = \frac{\sin \Pi(\xi_0 - \xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0) \sin \Pi(\zeta) \sin \Pi(\zeta_0)}{1 - \sin \Pi(\xi_0 - \xi) \cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0) - \sin \Pi(\xi_0 - \xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0) \cos \Pi(\zeta) \cos \Pi(\zeta_0)}.$$

Ovo je jednadžba kugle u općenom položaju. Da razaberemo, čim je ona predočena s gledišta Euklidove geometrije, napisat ćemo tu jednadžbu u obliku

$$\frac{1}{\sin \Pi(\xi_0 - \xi)} - \cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0) -$$
$$- \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0) \left\{ \cos \Pi(\zeta) \cos \Pi(\zeta_0) + \frac{\sin \Pi(\zeta) \sin \Pi(\zeta_0)}{\sin \Pi(r)} \right\} \quad 0$$

Digitized by Google

i uvrstiti u nju

$$\frac{1}{\sin\Pi(\zeta_0-\zeta)} \quad \mathrm{ch}(\zeta_0-\zeta) \quad \frac{e^{2\xi_0}+e^{2\xi}}{2e^{\xi_0+\xi}}.$$

Tako će izaći

$$e^{2\xi}+e^{2\xi_0}-2e^{\xi}\cos\Pi(\eta_0)\,.\,e^{\xi}\cos\Pi(\eta)-$$
$$-2e^{\xi}\sin\Pi(\eta_0)\cos\Pi(\zeta_0)\,.\,e^{\xi}\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta)-$$
$$-2e^{\xi_0}\sin\Pi(\eta_0)\sin\Pi(\zeta_0).e^{\xi}\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta)\mathrm{ch}r=0,$$

a to je po formulama (32):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0\,\mathrm{ch}\,r)^2 \quad z_0^2\,\mathrm{sh}^2 r.$$

Kugla, kojoj je geodetsko središte u M_0, a geodetski polumjer r, predočena je s gledišta Euklidove geometrije kuglom, kojoj je središte u $(x_0, y_0, z_0\,\mathrm{ch}\,r)$, a polumjer $z_0\,\mathrm{sh}\,r$.

U drugoj oznaci možemo općenu jednadžbu kugle pisati

$$\mathrm{ch}r=\mathrm{ch}(\zeta_0-\zeta)\mathrm{ch}\eta\mathrm{ch}\eta_0\mathrm{ch}\zeta\mathrm{ch}\zeta_0-\mathrm{sh}\eta\mathrm{sh}\eta_0\mathrm{ch}\zeta\mathrm{ch}\zeta_0-\mathrm{sh}\zeta\mathrm{sh}\zeta_0. \quad (36)$$

14. **Ekvidistantna površina.** Geometrijsko mjesto tačaka, koje od ravnine (x, z) ili, što je isto, od ravnine (ξ, η) imadu stalnu udaljenost r, naći ćemo kao zamotaljku kugala

$$(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0\mathrm{ch}\,r)^2-z_0^2\mathrm{sh}^2 r \quad 0.$$

Iz derivacija po x_0 i z_0 dobivamo

$$x_0=x, \quad z_0=z\mathrm{ch}r.$$

Kad se to uvrsti u jednadžbu kugle, dobivamo, da se ekvidistantna ova površina sastoji od ravnina

$$y-z\mathrm{sh}r \quad 0, \quad y+z\mathrm{sh}r \quad 0.$$

Ove se jednadžbe na temelju formula (32) mogu pisati

$$\zeta = r, \quad \zeta \quad -r. \quad (37)$$

Do ovoga resultata možemo i ovako doći. Jednadžba kugle, kojoj je središte u ravnini $\zeta=0$, jest

$$f\equiv \mathrm{ch}r-\mathrm{ch}(\zeta_0-\zeta)\,\mathrm{ch}\eta\,\mathrm{ch}\eta_0\,\mathrm{ch}\zeta+\mathrm{sh}\eta\,\mathrm{sh}\eta_0\,\mathrm{ch}\zeta \quad 0.$$

Digitized by Google

Sada je $f_{\xi_0} \equiv -\operatorname{sh}(\xi_0-\xi)\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta_0\operatorname{ch}\zeta = 0$,

$$f_{\eta_0} \equiv -\operatorname{ch}(\xi_0-\xi)\operatorname{ch}\eta\operatorname{sh}\eta_0\operatorname{ch}\zeta + \operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta_0\operatorname{ch}\zeta = 0.$$

Iz druge jednadžbe izlazi $\xi_0 = \xi$, a kad se to uvrsti u treću jednadžbu, dobije se $\eta_0 = \eta$. Ovo dvoje uvršteno u prvu dade $\zeta = r$.

Sada ćemo potražiti ekvidistantnu površinu, kojoj je medijana ravnina $\eta = 0$. To je zamotaljka kugala

$$x^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0\operatorname{ch}r)^2 = z_0^2\operatorname{sh}^2 r.$$

Iz derivacija po y_0 i z_0 dobivamo

$$y_0 = y, \quad z_0 = z\operatorname{ch}r,$$

a to uvršteno u jednadžbu kugle daje ove dvije ravnine

$$x-z\operatorname{sh}r = 0, \quad x + z\operatorname{sh}r = 0$$

ili

$$\operatorname{tg}\Pi(r) = \pm \sin\Pi(\zeta)\operatorname{tg}\Pi(\eta). \tag{38}$$

I ovdje možemo naći ekvidistantnu površinu bez obzira na ovu interpretaciju geometrije L o b a č e v s k o g a, ako uzmemo kuglu

$$f \equiv \operatorname{ch}r-\operatorname{ch}(\xi_0-\xi)\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\zeta\operatorname{ch}\zeta_0 + \operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\zeta_0 = 0.$$

Iz $f_{\xi_0} = 0$ izlazi opet, da je $\xi_0 = \xi$. Uvrstimo to u $f = 0$ i $f_{\zeta_0} = 0$, kvadrirajmo ove dvije jednadžbe, odbijmo jednu od druge, pa će nam izaći, kad se sredi,

$$\operatorname{sh}r = \operatorname{ch}\zeta\operatorname{sh}\eta.$$

Ostaje nam još, da nađemo ekvidistantnu površinu, kojoj je medijana ravnina $\xi = 0$. Koordinate središta kugala, kojima tražimo zamotaljku, ispunjavaju relaciju

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1;$$

jednadžba jedne takove kugle, kad se kvadrira, dade

$$(x^2+y^2+z^2+1-2x_0x-2y_0y)^2 = 4z^2\operatorname{ch}^2 r\,(1-x_0^2-y_0^2).$$

Iz derivacija ove jednadžbe po x_0 i y_0 dobiva se

Digitized by Google

$$x_0 \quad \frac{x(x^2+y^2+z^2+1)}{2(x^2+y^2+z^2\mathrm{ch}^2 r)},$$

$$y_0 \quad \frac{y(x^2+y^2+z^2+1)}{2(x^2+y^2+z^2\mathrm{ch}^2 r)}.$$

To ćemo uvrstiti u jednadžbu kugle, pokratiti sa $\frac{z^2\mathrm{ch}^2 r}{(x^2+y^2+z^2\mathrm{ch}^2 r)^2}$; pa će nam ostati jednadžba, koja se cijepa u faktore

$$x^2+y^2+z^2-1+2z\,\mathrm{sh}\,r = 0,$$
$$x^2+y^2+z^2-1-2z\,\mathrm{sh}\,r = 0.$$

Ekvidistantna površina ravnine (ζ, η) sastoji se od dvije kugle. Jednoj je središte u $(0, 0, \mathrm{sh}\,r)$, a drugoj u $(0, 0, -\mathrm{sh}\,r)$, a obje imadu $\mathrm{ch}\,r$ za polumjer. Ove dvije jednadžbe možemo pisati

$$e^{2\xi}-1 \pm 2e^{\xi}\sin\Pi(\zeta)\sin\Pi(\eta)\,\mathrm{sh}\,r = 0,$$

ili

$$\mathrm{tg}\,\Pi(r) \pm \mathrm{tg}\,\Pi(\xi)\sin\Pi(\zeta)\sin\Pi(\eta) = 0. \qquad (39)$$

15. **Transformacija.**

$$\begin{matrix}\xi & \xi\\ \eta & \eta\end{matrix}$$
$$\Pi(\zeta) \quad \frac{\pi}{2}-\Pi(\zeta).$$

Ova je transformacija analogna onoj, što smo je imali u članku 10. Što je kod određivanja geodetskih koordinata u ravnini bila os Y, to je sada os Z; zato u prostoru uzimamo tu transformaciju u ovom obliku. Kad formule (32) transformiramo ovim načinom, vidimo, da y prijeđe u z i obrnuto. Ovu transformaciju u ovoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga možemo dakle uzeti kao refleksiju na ravnini y z. Jasno je dalje, kako se ova transformacija može generalizirati, da vrijedi i u onom dijelu prostora, gdje je ζ negativno. Treba samo mjesto $\Pi(\zeta)$ uzimati $\frac{3\pi}{2}-\Pi(\zeta)$, dok se ξ i η ne mijenjaju.

Uzmimo kuglu

$$\sin\Pi(r) = \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta)$$

Digitized by Google

sa središtem u Ω. Onaj dio njezin, što je ispred ravnine (ξ, η); prijeđe u

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \cos \Pi(\zeta),$$

dok onaj dio, što je iza te ravnine, prijeđe u

$$\sin \Pi(r) = -\sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \cos \Pi(\zeta).$$

Prvu jednadžbu možemo pisati

$$e^{2\xi} - 2e^{\xi} \sin \Pi(\eta) \cos \Pi(\zeta) \operatorname{cosec} \Pi(r) + 1 = 0$$

ili

$$x^2+y^2+z^2 - 2y \operatorname{cosec} \Pi(r) + 1 = 0.$$

Ovo je kugla sa središtem u $(0, \operatorname{cosec} \Pi(r), 0)$ i s polumjerom $\operatorname{cotg} \Pi(r)$. Ta kugla u ovoj interpretaciji predočuje ravninu ortogonalnu na (ζ, η). Na pozitivnoj strani osi ζ odsijeca ona dužinu, kojoj pripada kut paralelnosti $\frac{\pi}{2} - \Pi(r)$. Drugom je jednadžbom predočena ravnina s ovom simetrična s obzirom na (ξ, η). Sistem koncentričnih kugala s geodetskim središtem u Ω transformira se u sistem ravnina ortogonalnih prema (ξ, η).

Ogledajmo sada kuglu, koja ravninu (ξ, η) tangira u ishodištu koordinatâ, a središte joj je na pozitivnoj osi ζ. Jednadžbu ćemo joj dobiti iz općene jednadžbe kugle, ako uzmemo $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = r$. Tim izlazi

$$1 - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta)\cos\Pi(r) - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta) = 0, \quad (40)$$

a to prijeđe u

$$1 - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta)\cos\Pi(r) - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta) = 0.$$

Da razaberemo značenje ove jednadžbe, pisat ćemo je u obliku

$$e^{2\xi} + 1 - 2e^{\xi} \sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta)\cos(r) - 2e^{\xi} \sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta) = 0$$

ili

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z \cos \Pi(r) - 2y + 1 = 0.$$

Ovo je kugla sa središtem u $(0, 1, \cos \Pi(r))$ i s polumjerom $\cos \Pi(r)$.

Digitized by Google

Kako vidimo, ova kugla tangira ravninu (x, y), dakle je to granična kugla.

Granična kugla, koja ravninu (ζ, η) tangira u Ω i koja je predočena jednadžbom (34), prijeđe u ravninu paralelnu s pozitivnom stranom ravninâ (ξ, η) i (ζ, η). Granična pak kugla (35) prijeđe u ravninu paralelnu s negativnom stranom ravnine (ξ, η) i s pozitivnom stranom ravnine (ζ, η). Oba smo puta uzeli one dijelove graničnih kugala, koji leže ispred (ξ, η).

Granična kugla, koja ravninu (ξ, η) tangira u Ω, ostaje neizmijenjena. Jednadžbu te granične kugle dobit ćemo, kad u (40) uzmemo $r = \infty$, dakle $\cos \Pi(r) = 1$; izlazi

$$1 - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta) - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta) = 0.$$

Ovo se može pisati

$$e^{2\xi} - 2e^{\xi}\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta) - 2e^{\xi}\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta) = 0$$

ili

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Ako u općenoj jednadžbi kugle uzmemo $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = r$, $\zeta_0 = 0$, dobit ćemo jednadžbu kugle, koja ravninu (ξ, ζ) tangira u ishodištu Ω. To je

$$1 - \sin\Pi(\xi)\cos\Pi(\eta)\cos\Pi(r) - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta) = 0.$$

Za $r = \infty$ dobivamo graničnu kuglu, koja je u istom snošaju prema ravnini (ξ, ζ), naime

$$1 - \sin\Pi(\xi)\cos\Pi(\eta) - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\sin\Pi(\zeta) = 0.$$

Ta se kugla transformira u

$$1 - \sin\Pi(\xi)\cos\Pi(\eta) - \sin\Pi(\xi)\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta) = 0$$

ili

$$e^{2\xi} + 1 - 2e^{\xi}\cos\Pi(\eta) - 2e^{\xi}\sin\Pi(\eta)\cos\Pi(\zeta) = 0.$$

Ovo je ravnina R paralelna s negativnim stranama ravninâ (ξ, η) i (ξ, ζ). U ovoj interpretaciji predočena je kuglom sa središtem u $(1, 1, 0)$ i s polumjerom 1. Za onu polovinu ove granične kugle, koja je iza ravnine (ξ, η), dobivamo transformacijom ravninu simetričnu s ravninom R s obzirom na (ξ, η).

Digitized by Google

Ekvidistantna površina, kojoj je medijana (ξ, η), prijeđe u isto takovu površinu.

Ona pak površina, kojoj je medijana ravnina (ξ, ζ), prijeđe u ravninu položenu kroz os ξ. Jednadžba je te ravnine

$$\operatorname{tg} \Pi(r) = \operatorname{tg} \Pi(\eta) \cos \Pi(\zeta).$$

Uzmimo još ekvidistantnu površinu, kojoj je medijana (ζ, η). Ona prijeđe u

$$\operatorname{tg} \Pi(r) = \operatorname{tg} \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \cos \Pi(\zeta). \qquad (41)$$

Ovo je ravnina, koja prolazi ishodištem koordinatâ Ω i s ravninom (ξ, η) zatvora kut $A = \Pi(r)$. U ovoj je interpretaciji ona predočena kuglom sa središtem $(0, \operatorname{cotg} A, 0)$ i s polumjerom $\operatorname{cosec} A$.

I ovdje smo svaki put transformirali samo onaj dio, koji je ispred (ξ, η), a uz to se nijesmo obazreli na drugi plašt ekvidistantne površine. Da smo sve to uzeli u račun, dobili bi u posljednjem slučaju dvije ravnine.

Neka su E_1 i E_2 dva plašta ekvidistantne površine (39). Oni će se transformirati u dvije ravnine R_1 i R_2, i to tako, da se $+E_1$ t. j. onaj dio prvoga plašta ekvidistantne površine, koji je ispred (ξ, η), transformira u $+R_1$, $-E_1$ u $-R_2$, $+E_2$ u $+R_2$ i $-E_2$ u $-R_1$.

Na osnovi ove transformacije izveo je H. Liebmann kružne srodnosti u ravnini Lobačevskoga[1].

[1] H. Liebmann: Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie.
Berichte der kögl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1902. str. 244—260.

Digitized by Google

Résumé.

Dans son mémoire sur les groupes kleinéens[1], M. H. Poincaré établit le principe d'une interprétation concrète de la géométrie de Lobatschefski. Pour la longueur d'un arc il prend l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$, étendue aux différents éléments de cet arc. Il s'ensuit qu'on doit aux mots droite et plan enlever leur signification, pour appeler droite ou plan toute circonférence ou toute sphère, qui coupe orthogonalement le plan (x, y). Cette interprétation permet par une simple traduction de transformer les théorèmes de Lobatschefski en théorèmes de géometrie euclidienne. On peut de même établir la relation entre les coordonnées d'un point dans le plan lobatschefskien et celles du point représentatif dans le demi-plan positif euclidien. Ce sont les formules (6), données par M. Lakhtine pour le plan. Dans la géometrie analytique à trois dimension il faut procéder de la manière suivante.

Comme les plans de coordonnées géodésiques il faut prendre les plans $(x, +z) \equiv (\xi, \eta)$, $(y, +z) \equiv (\xi, \zeta)$ et la partie supérieure de la sphère $S \equiv (\zeta, \eta)$, dont le rayon est égal à l'unité, et dont le centre est à l'origine de coordonnées rectangulaires. Le point Ω, où l'axe de $+z$ rencontre la sphère S, soit l'origine des coordonnées géodésiques. Pour obtenir les coordonnées ξ, η, ζ d'un point M (fig. 8) il faut mener par ce point une sphère concentrique à S. Soit A le point où l'axe de z rencontre cette seconde sphère; on aura allors $\Omega A = \xi$. Menons par le point M un plan parallèle au plan (y, z). L'arc de la ligne géodésique ainsi obtenue, rencontre le plan (x, z) au point B et l'on a $MB = \zeta$, $AB = \eta$. Dans les formules (32) les coordonnées rectangulaires sont exprimées par les coordonnées géodésiques.

Soit r le rayon d'une sphère et soient ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées de son centre; son équation est donnée dans l'article 13 sur la page 123. Si son centre est au point Ω on aura l'équation (33). Cette sphère coupe l'axe des ξ positifs au point U et l'axe des ξ

[1] Acta mathematica t. I, p. 8.; t. III, p. 56.

Digitized by Google

négatifs au point V. On peut prendre les grandeurs ξ en partant du point U ou du point V. Dans les équations de la sphère, ainsi transformées, il faut prendre $r = \infty$ et l'on obtiendra les équations des sphères limites (34) et (35). Dans cette interprétation l'image de la première sphère limite est le plan passant par Ω parallèlement au plan (x, y) et celle de la seconde la sphère qui touche le plan (x, y) au point O. Dans le plan on a un résultat analogue. Chaque droite parallèle à l'axe de x et chaque cercle qui touche cet axe, représente un cercle limite. D'ordinaire on fait usage seulement de cette seconde représentation des cercles et des sphères limites, quoique la première ait quelques avantages. Les formules (37), (38) et (39) sont les équations des surfaces équidistantes, dont les surfaces moyennes sont les plans de coordonnées géodésiques. Leurs images sont les plans et les sphères qui coupent le plan (x, y). Dans le plan on a les lignes équidistantes (27) et (28), dont les lignes moyennes sont les axes de ξ et de η.

Ces figures furent soumises à la transformation (29), étudiée spécialement par M. H. Liebmann. Dans cette forme on peut l'appliquer seulement aux points dans le demi-plan positif; pour le demi-plan négatif il faut prendre la forme (31). Enfin

$$\xi = \xi_1, \; \Pi(\eta) + \Pi(\eta_1) = \arcsin \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \eta u}{u} \, du$$

est la généralisation de cette transformation; elle est valable dans tout le plan. Pour l'éspace on a un résultat tout-à-fait analogue. Transformons p. e. la surface équidistante (39) dont la surface moyenne est le plan (ζ, η). Elle est constituée de deux nappes E_1 et E_2. Elles se transformeront en deux plans (41) R_1 et R_2 de cette manière: $+ E_1$ c'est à dire cette partie de E_1, qui est au-dessus du plan (ξ, η) se transformera en $+ R_1$, $- E_1$ en $- R_2$, $+ E_2$ en $+ R_2$, $- E_2$ en $- R_1$.

Dans cette interprétation de la géométrie lobatschefskienne, cette transformation se réduit simplement à la réflexion sur les droites $y = x$ et $y = -x$. Dans l'espace on a de même la réflexion sur les plans $y = z$ et $y = -z$. Ainsi les résultats de cette transformation deviennent intuitifs.

Digitized by Google

O nul-mjestima gibanja tekućine.

Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 15. srpnja 1903.

DR. STANKO HONDL.

§ 1. *Uvod.* — Da se dobije što bolja slika gibanja neke tekućine, zgodno je, da se svrati pozornost na ona mjesta, u kojima tekućina miruje. Zovimo ih n u l-m j e s t a. Mjesto brzine tekućine mogli bismo razmatrati kojigod drugi vektor i njegova nul-mjesta, ali je kinematično razmatranje najzornije.

Čini se, da poznavanje nul-mjestâ može biti i uvjet za riješenje nekih zadaća.

Jednostavno je razmatrati ta mjesta, kad je gibanje „solenoidalno“ $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\right)$, kad je gibanje „potencijalno“ $\left(u=\frac{\partial V}{\partial x},\ v=\frac{\partial V}{\partial y},\ w=\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, kad je gibanje potencijalno i solenoidalno — kraće: „Laplaceovo“[1], kad je gibanje dvodimenzionalno (n. pr. u ravnini, $w=0$). Laplaceovo dvodimenzionalno gibanje u uskoj je svezi s teorijom funkcija kompleksne promjenljivice.

F. K l e i n je u svojoj knjižici „Ueber Riemanns Theorie der alg. Funct. u. ihrer Integrale“ (1882.) mimogred promatrao nultočke. Uz obične oznake teorije funkcija jednadžba

$$w=\varphi+i\psi=\text{const.}+a_1\,(z-z_0)^{\alpha+1}+a_2\,(z-z_0)^{\alpha+2}+..$$
$$(\alpha=\text{cijeli broj},\ \alpha>0)$$

opisuje dva dvodimenzionalna Laplaceova gibanja, kod kojih je tekućina u točki z_0 u miru; jedno gibanje dobijemo, ako stavimo

[1] O ovim terminima v. „Encyclopädie der math. Wiss.“ Band IV, 14. §§ 6., 7., 8.

Digitized by Google

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

drugo, ako stavimo

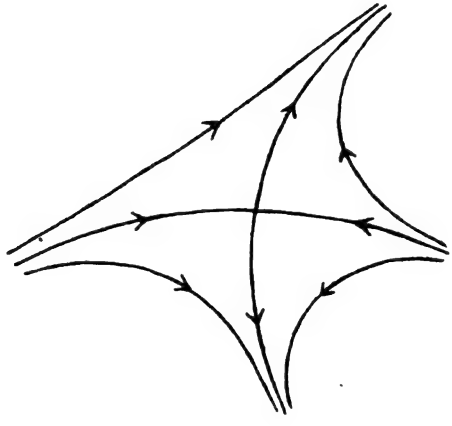
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Točku z_0 zove Klein „Kreuzungspunkt von der Multiplicität α". U toj se točki siječe $\alpha + 1$ grana krivulje $\psi = \text{const.}$ pod jednakim kutovima, a $\alpha + 1$ grana krivulje $\varphi = \text{const.}$ raspolovljuje te kutove. Da to vidimo, zadržimo samo najniži član reda za w i jednostavnosti radi uzmimo nul-točku u ishodištu. Onda je

$$w = a_1 z^{\alpha+1} = a_1 (x + iy)^{\alpha+1} = a_1 \rho^{\alpha+1} [\cos(\alpha+1)\theta + i \sin(\alpha+1)\theta]$$
$$\varphi = a_1 \rho^{\alpha+1} \cos(\alpha+1)\theta, \quad \psi = a_1 \rho^{\alpha+1} \sin(\alpha+1)\theta.$$

Krivulja $\varphi = 0$ ide $\alpha + 1$ puta kroz nul-točku. Itd.

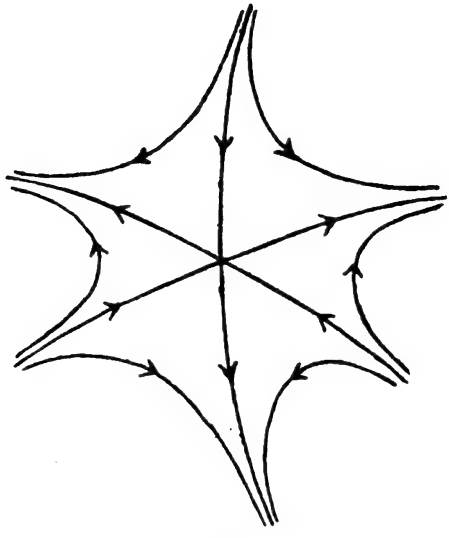
Ako je $\alpha = 1$, gibanje se može shematički predočiti sl. 1.; ako



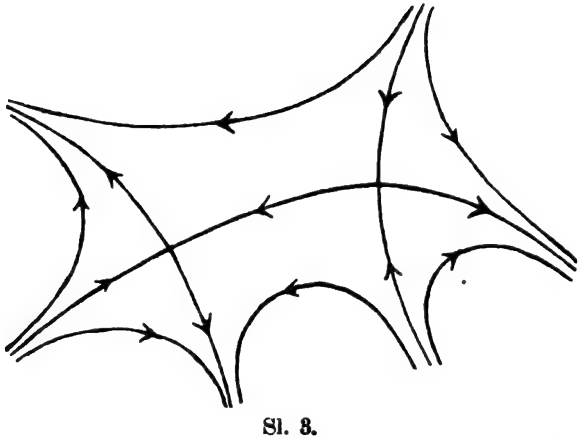
Sl. 1.

je $\alpha = 2$, slikom 2. Nul-točka s multiplicitetom α jest međašnji slučaj od α nul-točaka multipliciteta 1, koje su se sastale u jednu točku. Tako možemo misliti, da je sl. 2. nastala iz sl. 3.

Digitized by Google



Sl. 2.



Sl. 3.

§ 2. *Dimenzije nul-mjestâ Laplaceova gibanja.* — Ako u n-dimenzionalnom prostoru imamo Laplaceovo gibanje tekućine, pa ako postoji $(n-1)$-dimenzionalno nul-mjesto, onda tekućina svagdje miruje. Specijalni primjeri:

1. kod Laplaceova gibanja u crti nije moguća nul-točka,
2. kod Laplaceova gibanja u plohi nije moguća nul-crta,
3. kod Laplaceova gibanja u prostoru nije moguća nul-ploha.

§ 3. *Dokaz s pomoću Laplaceove jednadžbe.* — Izvest ćemo dokaz za trodimenzionalno gibanje (kratkoće radi). Položaj bilo

Digitized by Google

koje točke tekućine neka je određen krivocrtnim koordinatama $\xi\ \eta\ \zeta$. Jednadžba nul-plohe neka je $\zeta = \zeta_0$. U okolišu točke $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ ove plohe možemo potencijal predočiti Taylorovim redom

$$V = \Sigma\alpha(h,\ k,\ l)\ (\xi-\xi_0)^h\ (\eta-\eta_0)^k\ (\zeta-\zeta_0)^l$$

$$(h,\ k,\ l) = \left[\frac{\partial^{h+k+l} V}{\partial\xi^h\ \partial\eta^k\ \partial\zeta^l}\right]_{\xi_0\eta_0\zeta_0}$$

Najjednostavnije je odabrati koordinate krivocrtne tako

$$\xi = x,\quad \eta = y,\quad \zeta = f(x, y, z),$$

ako je $f(x, y, z) = \zeta_0$ jednadžba nul-plohe. Komponente brzine paralelne s osima pravokutnoga koordinatnog sustava jesu

$$\frac{\partial V}{\partial\xi},\ \frac{\partial V}{\partial\eta},\ \frac{\partial V}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Pravokutni se koordinatni sustav može uvijek tako postaviti, da u okolišu točke $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ bude $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ različno od 0. Onda u okolišu te točke, a na nul-plohi sve tri prve derivacije funkcije V iščezavaju. Načinimo te derivacije diferencirajući Taylorov red i onda stavimo $\zeta = \zeta_0$. Dobivamo tri jednadžbe, koje sadržavaju samo još promjenljive veličine ξ i η i koje su ispunjene za svako ξ i η (u granicama konvergencije tih redova). Treba dakle da iščezava svaki pojedini član tih redova. Tako se dobiva

$$(h,\ k,\ 0) = 0 \quad \text{za} \quad h > 0$$
$$(h,\ k,\ 0) = 0 \quad \text{za} \quad k > 0$$
$$(h,\ k,\ 1) = 0$$

Ili kraće:

$$(h,\ k,\ l) = 0,\ \text{ako je } l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},\ \text{izuzevši slučaj } h=k=l=0 \quad (1)$$

Dokazat ćemo, da je taj izraz $= 0$, i ako je $l > 1$. Poslužit ćemo se Laplaceovom jednadžbom. Ta je linearna i nema u njoj nederivirane funkcije V ni apsolutnoga člana. Ako smo dokazali, da sve derivacije do inclusive reda $n + 1$ iščezavaju, izlazi, da i

Digitized by Google

derivacije reda $n+2$ iščezavaju. Diferencirajmo Laplaceovu jednadžbu n puta i to h puta po ξ, k puta po η, l puta po ζ $(h+k+l=n)$. Uvrstimo ξ_0 η_0 ζ_0. Onda u njoj dolaze članovi reda $n+2$

$$(h+2, k, l),\ (h, k+2, l),\ (h, k, l+2)$$
$$(h, k+1, l+1),\ (h+1, k, l+1),\ (h+1, k+1, l)$$

i članovi nižih redova; posljednji iščezavaju po pretpostavci. Iz onakove n-te darivacije Laplaceove jednadžbe, u kojoj je $l=0$, izlazi u savezu sa (1), da je

$$(h, k, 2) = 0, \quad \text{ako je} \quad h+k=n.$$

Iz onakove n-te derivacije, za koju je $l=1$, izlazi iz (1) i iz netom dobivene jednadžbe

$$(h, k, 3) = 0, \quad \text{ako je} \quad h+k=n-1$$

Itd. Ako dakle iščezavaju sve derivacije reda $n+1$, iščezavaju i derivacije reda $n+2$. No derivacije 1. reda iščezavaju, dakle iščezavaju i članovi 2. reda (što izlazi iz nederivirane Laplaceove jednadžbe, $n=0$) i svih viših redova.

Taylorov se red dakle završuje sa svojim prvim članom

$$V = (0, 0, 0) = \text{const.}$$

Derivacije od V jesu prema tomu $\mathrm{svagdje} = 0$.

Ali kod ovoga se dokazivanja pretpostavlja, da koeficijent od $\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}$ u Laplaceovoj jednadžbi ne iščezava. Doista je taj koeficijent $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2$, dakle različan od 0.

§ 4. *Dokaz s pomoću teorema cirkulacije.* — I Koláček[1] spominje, da „ne může, předpokládá-li se spojitost komponent u, v, w, rychlost býti nullou ani na ploše ani v nějaké prostorové partii tekutiny, třeba sebe menší. Sestrojme si k ploše jinou blízkou, na níž rychlost nullou již není, volme na ní element $d\omega'$ a veďme obvodem jeho přímky udávající směry rychlosti až k ploše pů-

[1] Hydrodynamika, v Praze 1899., p. 25.

Digitized by Google

vodní, tak že se zde vysekne element $d\omega$. Z tělesa omezeného plochami $d\omega$, $d\omega'$ a pláštěm může tekutina plochou $d\omega'$ unikati (neb vnikati), aniž by unikala neb vnikala ostatními jeho plochami, čímž se princip nestlačitelnosti porušuje". Ali ovdje je uzeta u obzir samo solenoidalnost gibanja, pa ovo razmatranje ne dokazuje drugo nego samo to, da crte struje, koje izlaze iz ruba elementa $d\omega'$, ne mogu zgađati nul-plohu, nego da uopće idu paralelno s njom. (Kad bi onaj zaključak valjao, moglo bi se dokazati i za solenoidalno gibanje vrtložno, da ni kod njega ne može biti nul-plohâ, a ipak je poznato, da ih može biti.) Treba još uzeti u obzir, da je gibanje potencijalno. U tom slučaju treba da je cirkulacija 0, t. j. da je

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0,$$

ako se integracija izvede preko kojegod zatvorene krivulje. Put integracije odaberimo ovako. Iz točke A na nul-plohi pomaknimo se beskonačno malo do točke A' u smjeru okomitom na nul-plohu, dakle u smjeru, koji je okomit na crtama struje. Od točke A' pomaknimo se za konačan komad puta do točke B' duž crte struje. Od točke B' pomaknimo se opet (za beskonačno malen komadić puta) u smjeru okomitom na crte struje do točke B na nul-plohi. Napokon od točke B vratimo se na nul-plohi kojimgod putem do točke A. Tim se put integracije sastoji iz četiri dijela.

Integracijom duž AA' dobivamo 0, jer se pomičemo okomito na crte struje,
„ „ $A'B'$ „ pozitivan od 0 različan iznos,
„ „ $B'B$ „ 0,
„ „ BA „ 0.

Zbrojitbom izlazi, da cirkulacija nije 0, kako bi moralo biti.

Kao što sama solenoidalnost nije dovoljna, da vrijedi naš teorem, tako nije ni sama potencijalnost. To se vidi i iz našega prvog dokaza, gdje nije bilo dosta, da se izraze komponente brzine s pomoću prvih derivacija jedne iste funkcije V, nego je trebalo još uzeti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.

Jednostavan primjer potencijalnoga gibanja sa nul-plohom jest gibanje $u = \frac{\partial V}{\partial x}$, $v = 0$, $w = 0$, gdje je V samo funkcija od x; mjesta, gdje je $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, jesu nul-ravnine.

Digitized by Google

§ 5. *Laplaceovo gibanje u okolišu nul-točke.* — Nul-točka neka je u ishodištu koordinatnoga sustava. U okolišu nul-točke možemo potencijal brzine izraziti nizom sfernih prostornih funkcija

$$V = S_0 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots,$$

gdje je

$$S_2 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$
$$\Delta S_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$$

Plohe niveaua, koje prolaze blizu nul-točke, imadu približno jednadžbu

$$S_2 = V - S_0,$$

dakle su plohe 2. stupnja. Ove su plohe ili dvoplohi ili jednoplohi hiperboloidi. Jedne od drugih rastavlja čun $S_2 = 0$. Brzina tekućine okomita je na tim plohama. Tekućina može strujiti iz prostora dvoplohih hiperboloida u prostor jednoplohih ili obrnuto.

Ako je gibanje tekućine u blizini ishodišta dano potencijalom

$$V = S_0 + S_n + S_{n+1} + \ldots,$$

onda je ishodište nul-točka stupnja $n-1$. Među plohama niveaua nalazi se čun $S_n = 0$, koji ili nema nijednoga višestrukog pravca, ili ima višestrukih pravaca. U posljednjem je slučaju nul-točka presjecište nul-pravaca.

§ 6. *Veličina brzine u okolišu nul-točke.* — Razmatrajmo veličinu brzine dvodimenzionalnog gibanja u okolišu jednostavne nul-točke. U prvoj približnosti možemo brzinu predočiti komponentama

$$u = a_1x + b_1y, \quad v = a_2x + b_2y.$$

Kvadrat brzine jest

$$u^2 + v^2 = (a_1^2 + a_2^2)x^2 + (b_1^2 + b_2^2)y^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)xy.$$

Krivulja, koja spaja mjesta jednake brzine, jest prema tome uvijek elipsa; imademo naime

$$(a_1^2+a_2^2)\ (b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \text{pozit.}$$

Digitized by Google

Ako je gibanje Laplaceovo, t. j. $a_1 = -b_2$, $a_2 = b_1$, elipsa biva kružnicom.

Uzmimo Laplaceovo gibanje u okolišu nul-točke s multiplicitetom α. Njegov je potencijal u prvoj približnosti

$$V = a_1 \rho^{\alpha+1} \sin(\alpha+1)\vartheta.$$

Komponenta brzine u smjeru radija vektora jest $\frac{\partial V}{\partial \rho}$, a u smjeru okomitom na radij vektor $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta}$. Iz toga se nađe kvadrat brzine, i onda brzina sama

$$a_1 \ (\alpha+1)\rho^{\alpha}.$$

Kod Laplaceova gibanja u okolišu α-struke nul-točke, krivulje jednakih brzina jesu kružnice; brzina na svakoj kružnici jest razmjerna sa α-tom potencijom polumjera.

Kod trodimenzionalnoga gibanja plohe jednakih brzina jesu elipsoidi. Ako je gibanje Laplaceovo, dužine A, B i C poluosi elipsoida zadovoljavaju neku relaciju. Uz zgodan namještaj koordinatnih osi gibanje je dano jednadžbama

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = cz, \quad a + b + c = 0.$$

Elipsoidi jednakih brzina imadu jednadžbu

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = k^2$$

$$|a| = \frac{k}{A}, \quad |b| = \frac{k}{B}, \quad |c| = \frac{k}{C}.$$

Dvije od veličina a, b, c, n. pr. a i b, treba da imadu isti predznak, a treća protivni. Onda je $|a| + |b| = |c|$ ili

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}.$$

Poluos C pokazuje u prostor dvoplohih hiperboloida. Ta je os, kako se iz dobivene relacije vidi, najmanja. Elipsoid jednakih brzina ne može biti kugla ni nategnuti elipsoid rotacije.

§ 7. *Nul-crta potencijalnoga gibanja.* — U okolišu nul-crte potencijalnoga gibanja smjer je brzine uopće okomit na nul-crtu. Ili: u

Digitized by Google

beskrajno malenoj udaljenosti od nul-crte komponenta brzine, koja je okomita na nul-crti, beskrajno je malena veličina uopće nižega stupnja negoli komponenta brzine, koja je paralelna s nul-crtom. Samo kod pojedinih točaka nul-crte ne treba da to bude (kod onakovih točaka, gdje nul-crtu siječe druga nul-crta).

Načinimo cirkulaciju duž ovoga puta:

Od točke A na nul-crti pomaknimo se do A', tako da je AA' beskrajno maleno 1. reda i AA' okomito na nul-crti. U točki A' rastavimo brzinu u dvije komponente: jednu, koja leži u normalnoj ravnini nul-crte, i drugu, kojoj je smjer paralelan s nul-crtom. U smjeru ove druge komponente pomaknimo se vrlo malo do točke A'_1, iz ove se točke pomaknimo opet vrlo malo u smjeru komponente paralelne s nul-crtom itd., dok se nijesmo najposlije pomakli za konačan komad puta uvijek paralelno s nul-crtom do točke B'. Iz B' spustimo okomicu na nul-crtu, koja će je zgađati u B. Iz B vratimo se na nul-crti do A. Ako sada uzmemo, da su na crti $A'B'$ obje komponente brzine beskrajno malene veličine istoga stupnja n, onda je dio cirkulacije

duž AA' beskrajno maleno stupnja $n+1$,
„ $A'B'$ „ „ „ n,
„ $B'B$ „ „ „ $n+1$,
„ BA 0.

Ukupna cirkulacija bila bi prema tomu beskrajno malena veličina stupnja n, dakle različna od 0. Komponenta normalna na nul-crtu treba dakle da je bar za jedinicu nižega stupnja negoli komponenta paralelna sa nul-crtom.

Posljedica toga jest, da se nul-crta tekućine, koja se giblje potencijalno u zatvorenoj posudi, na stijeni može svršivati samo tako, da stoji okomito na njoj.

Slično se dade dokazati, da i brzina tekućine potencijalnoga gibanja u okolišu nul-plohe stoji okomito na nul-plohi.

§ 8. *Nul-crta Laplaceova gibanja.* — Ako oko nul-crte Laplaceova gibanja načinimo krugove s vrlo malenim polumjerom, tako da središta leže na nul-crti, a ravnine su im okomite na nul-crti, onda imademo na svakoj takvoj kružnici određen broj točaka, u kojima smjer brzine produljen zgađa nul-crtu; razmak između susjedne dvije takove točke svagdje je isti; u raspolovištima tih razmaka leže točke, u kojima brzina ima smjer tangencijalan na kružnicu.

Digitized by Google

Da to dokažemo, presijecimo nul-crtu u kojojgod točki normalnom ravninom. Promatrajmo u toj ravnini dvodimenzionalno gibanje tekućine, koje dobivamo, ako brzine trodimenzionalnoga gibanja projiciramo u ravninu. Nul-crti odgovara u ravnini nul-točka. Gibanje u ravnini još je uvijek potencijalno, no ono uopće nije više solenoidalno. Ali u okolišu nul-točke solenoidalnost je sačuvana, jer blizu nul-crte, kojoj ta nul-točka pripada, brzina ima smjer paralelan s ravninom, pa tamo niti pritječe tekućina u ravninu niti otječe iz nje. Dakle u okolišu nul-točke razmatrano pomoćno gibanje u ravnini jest Laplaceovo gibanje, pa za nj vrijedi, što je rečeno u § 1. o presijecanju crtâ struje i crtâ jednakoga potencijala u nul-točki.

Vratimo li se k trodimenzionalnomu gibanju, izlazi gore citirani poučak.

Smjerovi crtâ struje, koje idu kroz nul-crtu, mogu se kojekako savijati (tordirati) oko nul-crte, ako se duž nul-crte pomičemo.

§ 9. *Kroneckerov poučak.* — Kronecker je pokazao[1] svezu, koja postoji između broja nul-točaka u nekom prostoru i vrijednosti nekoga integrala uzeta preko međe toga prostora. Njegove resultate reproducirat ćemo u Picardovu obliku.

Neka su F_1 i F_2 besprekidne funkcije od x i y, koje se u svakoj točki x_0 y_0 nekoga omeđena prostora mogu razviti u nizove potencija od $x-x_0$ i $y-y_0$. Ako u nekoj točki x_0y_0 obje funkcije iščezavaju, imamo

$$F_1 = a_1 (x-x_0) + b_1 (y-y_0) + \ldots$$
$$F_2 = a_2 (x-x_0) + b_2 (y-y_0) + \ldots$$

U svakoj takovoj točki neka je $a_1 b_2 - a_2 b_1$ različno od 0 ili

$$D = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \text{ različno od } 0.$$

Onda integral

[1] Monatsber. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin 1863.; v. Picard: Traité d'Analyse, T. I. pp. 84. 123., T. II. p. 193.

Digitized by Google

$$I = \frac{1}{2\pi}\int \left\{ \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{F_1^2 + F_2^2}\, dx + \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{F_1^2 + F_2^2}\, dy \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int d\left(\text{arc-}tg\ \frac{F_2}{F_1} \right)$$

uzet u smislu pozitivnom preko cijeloga kontura, koji omeđuje neki prostor, pokazuje, koliko ima u tom prostoru više nul-točaka (rješidbi od $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$) sa $D > 0$ negoli nul-točaka sa $D < 0$. Na samom konturu ne smije biti nul-točaka, u prostoru ne smije biti nul-točaka sa $D = 0$.

U trodimenzionalnom prostoru vrijedi uza slične uvjete analogan poučak. Preko međe uzimlje se integral

$$I = \frac{1}{4\pi}\int A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy,$$

gdje je

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{itd.}$$

Vrijednost od I jednaka je razlici broja nul-točaka (rješidbi sustava $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$) sadržanih u razmatranom prostoru, u kojima je funkcijonalni determinant

$$D = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} > 0,$$

i broja nul-točaka, u kojima je $D < 0$.

§ 10. *Kinematička interpretacija, ako je prostor dvodimenzionalan.* — Ovi resultati čiste analize mogu se jednostavno kinematički interpretirati. Uzmimo makar kakovo besprekidno gibanje

Digitized by Google

tekućine u ravnini. Ako nul-točku M odaberemo za ishodište, dane su komponente brzine jednadžbama

$$F_1 = u = a_1 x + b_1 y + \ldots .$$
$$F_2 = v = a_2 x + b_2 y + \ldots .$$

Načinom, koji je analogan načinu, s kojim ćemo se poslužiti kod trodimenzionalnoga gibanja, može se vidjeti, što znače uvjeti $D \gtrless 0$. Pomislimo u susjedstvu od M kojegod dvije točke M_1 i M_2 i u njima brzine V_1 i V_2. Ako kut M_1MM_2 ima isti predznak kao kut V_1V_2, onda je $D>0$; nul-točku zvat ćemo pozitivnom. Ako ti kutovi imadu različite predznakove, onda je $D<0$; nul-točku zvat ćemo negativnom.

Katkada je spretnija druga interpretacija. Iz nul-točke obično izlaze dva pravca, u kojima brzina ima smjer, koji ide kroz nul-točku. Možemo ih zvati osima nul-točke. (Kod potencijalnoga gibanja osi stoje jedna na drugoj okomito, v. sl. 1.) Ako se tekućina na obje osi udaljuje od nul-točke ili ako se na obje osi približava nul-točki, imamo pozitivnu nul-točku. Ako se tekućina na jednoj osi udaljuje od nul-točke, a na drugoj približava, imamo negativnu nul-točku. Simbolički može se to ovako predočiti.

Za $D>0$ imamo nul-točku $[++]$ ili $[--]$,
za $D<0$ „ „ $[+-]$,

gdje predznakovi u zagradama naznačuju smjerove brzina u osima. Kod Laplaceova gibanja moguće su samo negativne nul-točke.

Tražiti integral I kod dvodimenzionalnoga zadatka znači zbrajati elemente periferije nekoga pomoćnog kruga, kao što bi se lako dalo pokazati sličnim načinom kao kod trodimenzionalnoga zadatka. Iz toga, što se diferencijal pod znakom integrala dade predočiti kao $d \operatorname{arc\,tg} \frac{F_2}{F_1}$, izlazi, da I pokazuje broj okretâ (s obzirom na predznak), što ih izvede vektor, kojemu su komponente F_1 i F_2, ako obiđemo cijeli kontur. Zovemo li naime kut između toga vektora i osi apscisâ θ, naš je diferencijal $= d \operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} \theta = d\theta$. I je dakle svakako cio broj, jer je put integracije zatvoren.

Ujedno vidimo, što znači integral I, ako se u našem prostoru nalaze i takove nul-točke, za koje je $D=0$. Treba samo ovakovu nul-točku opkoliti vrlo malenim krugom, pa izvesti integraciju preko zadanoga kontura i ovoga novog kontura. Tim dobiveni

Digitized by Google

integral tiče se onda prostora, koji je ostao, kad smo ovu osobitu nul-točku uklonili. Tako se vidi, da nul-točka u sl. 2. vrijedi za dvije negativne nul-točke, jer se smjer brzine dva puta u negativnom smislu okrene, ako tu nul-točku obiđemo vrlo blizu jedan put u pozitivnom smislu. Mogu se i singularne točke eliminirati, n. pr. izolirana vrtložna točka Laplaceova gibanja; u njezinu je okolišu brzina beskrajna; budući da smjer brzine načini jedan pozitivni okret, ako jedan put obiđemo singularnu točku, ekvivalentna je ona s pozitivnom nul-točkom.

Jasno je također, što treba raditi, ako i na konturu ima nul-točaka. Te nul-točke treba isključiti iz područja integracije, — najjednostavnije malenim polukruzima, kojih su središta u nul-točkama. Integracija preko polukruga znači polovicu cijeloga okreta brzine (pozitivno ili negativno).

§ 11. *Interpretacija Kroneckerova uvjeta, ako je prostor trodimenzionalan.* — U okolišu nul-točke (ishodišta) komponente brzine jesu:

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots . \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots . \\ w &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots . \end{aligned} \tag{1}$$

$$D = (a_1 \;\; b_2 \;\; c_3)$$

Transformirajmo pravokutni koordinatni sustav jednadžbama

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \tag{2}$$

u bilo kakav drugi sustav. Onda su komponente brzine paralelne s novim koordinatnim osima

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w \\ v' &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w \\ w' &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w. \end{aligned} \tag{3}$$

Supstituiramo li iz (2) u (1), a onda iz (1) u (3), dobivamo

Digitized by Google

$$u' = a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z' + \ldots$$
$$v' = a'_2 x' + b'_2 y' + c'_2 z' + \ldots$$
$$w' = a'_3 x' + b'_3 y' + c'_3 z' + \ldots$$
$$D' = (a'_1 \; b'_2 \; c'_3).$$

Kod toga je

$$D' = (\alpha_1 \; \beta_2 \; \gamma_3)^2 . D.$$

Transformacijom koordinatnoga sustava predznak od D nije se promijenio. 6 koeficijenata u (2) možemo po volji odabrati. Odaberimo ih tako, da bude $a'_2 = a'_3 = b'_1 = b'_3 = c'_1 = c'_2 = 0$. Ako je gibanje potencijalno, bit će novi koordinatni sustav pravokutan, jer je kod potencijalnoga gibanja uz izbor pravokutnoga sustava $a'_2 = b'_1$, $a'_3 = c'_1$, $b'_3 = c'_2$.

Gibanje je zadano jednadžbama

$$u' = a'_1 x' + \ldots, \quad v' = b'_2 y' + \ldots, \quad w' = c'_3 z' + \ldots$$
$$D' = a'_1 \; b'_2 \; c'_3.$$

Na koordinatnim se osima tekućina giblje smjerom, koji prolazi kroz ishodište.

1. Ako je $D > 0$, onda su ili sva tri faktora, iz kojih se sastoji D', pozitivna, t. j. tekućina se na svakoj osi udaljuje od nul-točke, ili je jedan faktor pozitivan, a dva negativna, t. j. tekućina se na jednoj osi udaljuje, a na dvjema približuje nul-točki; nul-točka predočena je simbolom

$$[+ + +] \quad \text{ili} \quad [+ - -].$$

2. Ako je $D < 0$, slično; nul-točka predočena je simbolom

$$[+ + -] \quad \text{ili} \quad [- - -].$$

Kod Laplaceova gibanja nema nul-točaka sa prvim ili četvrtim simbolom; ako je $D > 0$, tekućina struji iz prostora jednoplohih hiperboloida u prostor dvoplohih; ako je $D < 0$, obrnuto.

Primjedba. Spomenut ćemo bez dokaza, što znači uvjet $D = 0$. Ne treba da se radi o nul-točki. Ako je taj uvjet u bilo kakvoj točki M ispunjen, znači to, da iz te točke izlazi pravac, na kojemu je brzina i smjerom i veličinom jednaka u prvoj približnosti brzini u M. Ako D tako iščezava, da su svi njegovi subdeterminanti $= 0$, onda iz M izlazi ravnina, na kojoj je brzina jednaka brzini u M. Ako je napokon svaki element od D jednak 0, onda je u cijelom okolišu točke M brzina jednaka.

Digitized by Google

§ 12. *Drugi način interpretacije.* — U okolišu nul-točke M odaberimo točke 1, 2, 3, ali tako, da ne leže sve četiri točke u jednoj ravnini. Smjerovi $M1$, $M2$, $M3$ neka čine desni koordinatni sustav. Budući da je uvjet $D \gtrless 0$ invarijantan, možemo ga protegnuti na taj koordinatni sustav.

Točka 1 ima koordinate dx, 0, 0
„ 2 „ „ 0, dy, 0
„ 3 „ „ 0, 0, dz.

U točki 1 ima vektor b_1 komponente $\frac{\partial F_1}{\partial x}dx$, $\frac{\partial F_2}{\partial x}dx$, $\frac{\partial F_3}{\partial x}dx$
„ „ 2 „ „ b_2 „ $\frac{\partial F_1}{\partial y}dy$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}dy$, $\frac{\partial F_3}{\partial y}dy$
„ „ 3 „ „ b_3 „ $\frac{\partial F_1}{\partial z}dz$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}dz$, $\frac{\partial F_3}{\partial z}dz$.

Prenesimo ove vektore kao dužine paralelno u ishodište M. Onda ova tri vektora određuju tetraedar, kojemu je volum

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}dx & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \sin xy \,.\, \cos ss',$$

ako je s' okomito na ravnini xy, i to tako, da i xyz' čine desni koordinatni sustav.[1] Onda je $\cos ss'$ pozitivno. Uvjet $D \gtrless 0$ prelazi dakle u

$$T \gtrless 0.$$

Volum je pak tetraedra pozitivan, ako b_1, b_2, b_3 čine desni sustav osi. Ako je dakle $D > 0$, vektori b_1, b_2 i b_3 čine desni sustav osi, i obrnuto. Drugim riječima: ako je $D > 0$, vektor b_1 opisuje čun u istom smislu kao radij vektor $M1$, i obrnuto.

Razumije se, da je ova interpretacija u skladu s interpretacijom predašnjega paragrafa.

[1] v. Baltzer: Theorie u. Anw. der Determinanten, 1881. § 15. 4.

Digitized by Google

§ 13. *Jednostavniji oblik integrala I.* — U § 10. vidjelo se, da diferencijal pod znakom integrala I, ako se radi o ravnini, zavisi samo o smjeru vektora F_1, F_2, a nipošto o njegovoj veličini. Lako se uvjeriti, da je tako i u prostoru. Stavimo stoga

$$F_1 = Ff_1, \quad F_2 = Ff_2, \quad F_3 = Ff_3, \quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1,$$

gdje je F veličina vektora, a f_1, f_2, f_3 kosinusi smjera. Onda bude (§ 9.)

$$A = \frac{1}{F^2} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial F}{\partial y} f_1 + F \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} f_1 + F \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ f_2 & . & . \\ f_3 & . & . \end{vmatrix}$$

Ako prvi stupac pomnožimo sa $\frac{\partial F}{\partial y}$ i odbijemo od drugoga, a onda opet prvi stupac pomnožimo sa $\frac{\partial F}{\partial z}$ i odbijemo od trećega, pa iz drugoga i trećega stupca tim dobivena izvadimo zajednički faktor F, dobivamo

$$A = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ f_3 & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Ako ovdje prvi redak pomnožimo sa f_1 i k tomu pribrojimo drugi redak pomnožen sa f_2 i treći pomnožen sa f_3, dobivamo prvi izraz za A u ovom retku

$$A = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(y, z)} = \frac{1}{f_2} \cdot \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(y, z)} = \frac{1}{f_3} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)};$$

drugi i treći izraz dobivaju se sličnim načinom. Slično je

$$B = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(z, x)} = \ldots, \quad C = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x, y)} = \ldots$$

Prema tomu je

Digitized by Google

$$I = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \left| \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(y, z)} \cos\lambda + \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(z, x)} \cos\mu + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x, y)} \cos\nu \right| \frac{d\sigma}{f_1} = \ldots,$$

gdje su $d\sigma$ element površine rasmatranoga prostora, $\lambda\mu\nu$ kutovi normale s koordinatnim osima.

Mimogred neka bude spomenuto, da vektor A, B, C pokazuje smjer, u kojemu se treba pomaknuti, da vektor F_1, F_2, F_3 ne promijeni svoga smjera. Dokaz nije težak.

§ 14. *Geometrijsko značenje izraza pod znakom integrala I.* - Na plohi S, koja omeđuje zadani prostor, uzmimo tri točke vrlo blizu.

Točka M_0 neka ima koordinate x, y, z,
„ M_1 „ „ „ $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$,
„ M_2 „ „ „ $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$.

$\Delta M_0 M_1 M_2$ gledajući ga iz vanjske strane plohe S neka je opisan u smislu pozitivnom.

Ako su u točki M_0 komponente vektora f_1, f_2, f_3,
onda su u točki M_1 komponente vektora

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \ldots,\ f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \ldots,\ f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \ldots,$$

u točki M_2 komponente vektora

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \ldots,\ f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \ldots,\ f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x} \delta x + \ldots$$

Šesterostruki volum tetraedra, što ga čine ova tri vektora, ako ih kao dužine prenesemo u istu točku, dan je determinantom, kojemu su elementi netom napisane komponente tih vektora. Odbijemo li u tom determinantu prvi redak od drugoga i trećega, i pribrojimo li onda drugi stupac pomnožen sa f_2 i treći pomnožen sa f_3 k prvomu stupcu pomnoženu sa f_1, dobivamo

$$6\,T = \frac{1}{f_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \ldots, & \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \ldots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \ldots, & \frac{\partial f_3}{\partial x} \delta x + \ldots \end{vmatrix} =$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{f_1} \cdot \left[\frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(y, z)} (dy\delta z - \delta y dz) + \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(z, x)} (dz\delta x - \delta z dx) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x, y)} (dx\delta y - \delta x dy) \right]$$

Ako stavimo $\Delta M_0 M_1 M_2 = d\sigma$, onda je

$$dy\,\delta z - \delta y\,dz = 2 \,.\, d\sigma \,.\, \cos\lambda$$
$$dz\,\delta x - \delta z\,dx = 2 \,.\, d\sigma \,.\, \cos\mu$$
$$dx\,\delta y - \delta x\,dy = 2 \,.\, d\sigma \,.\, \cos\nu.$$

Dakle

$$3\,T = \frac{1}{f_1} \left[\frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(y, z)} \cos\lambda + \,.\,. \right] d\sigma.$$

Krajnje točke svih vektora f_1, f_2, f_3, ako te vektore prenesemo u jednu točku, leže na kugli s polumjerom 1. Ako komadiću $d\sigma$ površine S odgovara na toj kugli element površine $d\sigma_k$, onda je

$$3\,T = \pm\, d\sigma_k \,.\, 1.$$

Dakle je diferencijal pod znakom integrala I jednak elementu površine pomoćne kugle. Predznak može biti dvojak, jer volum tetraedra može izaći pozitivan ili negativan prema tomu, da li ona tri susjedna vektora uzeta redom gore naznačenim čine desni ili lijevi sustav osi.

Za izračunavanje integrala I treba dakle poznavati samo smjer vektora F_1, F_2, F_3, i to samo na plohi S.

§ 15. *Izračunavanje integrala I.* — I se izračunava tako, da se samo zbrajaju elementi površine pomoćne kugle. Svakomu elementu $d\sigma$ zadane plohe S odgovara element pomoćne kugle $d\sigma_k$. Pitanje je, koliko puta svi elementi $d\sigma_k$ pokrivaju kuglu (uz obzir na predznak). Mnogostruku površinu kugle, što je tvore elementi $d\sigma_k$, zovimo S_k. Budući da je S zatvorena ploha, treba da je i S_k zatvoreno, a to će reći, da je I cio broj.

Najjednostavniji je slučaj, da svi elementi $d\sigma_k$ iščezavaju. To će biti, ako su brzine (vektori) na S svagdje međusobno paralelne, ili ako su paralelne s nekom ravninom. Jednostavan je također slučaj, da ploha S_k ne pokriva ni jedanput cijelu pomoćnu kuglu (i bez obzira na predznak). S_k pokriva onda dio kugle parni broj

Digitized by Google

puta, i to toliko puta pozitivnim načinom, koliko puta negativnim. Ukupna je površina od S_k onda *0*. To imamo n. pr., ako se ploha S (najjednostavnije je da bude svagdje konveksna) nalazi u polju izvedenom od jednog izvora, koji se nalazi izvan S. Ako taj izvor mislimo u nutarnjosti od S, onda S_k pokriva kuglu 1 puta ili uopće lihi broj puta.

Pojedini se listovi plohe S_k drže jedan drugoga u crtama ili u točkama. — U mnogim primjerima nalaze se na plohi S crte, u kojima je smjer brzine svagdje isti. Na ovakove crte treba osobito paziti, jer im na pomoćnoj kugli odgovaraju samo točke; ovakove točke čine onda prijelaz iz jednoga lista plohe S_k u drugi.

§ 16. *Odgovor na jedno pitanje Picardovo.* — Picard u spomenutom već djelu veli[1]: „Remarquons aussi que l'integrale I prend une forme toute différente si, au lieu des trois équations primitives, on forme avec elles une combinaison linéaire. Par suite, l'intégrale qui, au signe près, ne devrait pas changer, ne se presente pas sous une forme invariante. Il semble donc que le résultat précédent, si intéressant qu'il soit, appelle encore de nouvelles recherches".

Naše razmatranje (s pomoću vektora) omogućuje, da Picardovo pitanje razjasnimo i da opasku Picardovu raširimo.

Stavimo:

$$F'_1 = a_1F_1 + b_1F_2 + c_1F_3$$
$$F'_2 = a_2F_1 + b_2F_2 + c_2F_3$$
$$F'_3 = a_3F_1 + b_3F_2 + c_3F_3.$$

Onda je determinanta transformiranoga vektora

$$D' = (a_1\ b_2\ c_3)\ D,$$

dakle ili uvijek istoga predznaka, kao determinant D, ili uvijek protivnoga predznaka. Komponente danoga i transformiranog vektora možemo pisati u obliku

$$F_1 = F\cos\alpha, \quad F_2 = F\cos\beta, \quad F_3 = F\cos\gamma,$$
$$F'_1 = F'\cos\alpha', \quad F'_2 = F'\cos\beta', \quad F'_3 = F'\cos\gamma'.$$

F i F' bitno su pozitivni. Po pretpostavci F na površini nigdje ne iščezava. Uzmimo, da ni F' na njoj nigdje ne iščezava, dakle da je $(a_1\ b_2\ c_3)$ različno od 0. Onda se funkcije

[1] Traité T. I. p. 127.

Digitized by Google

$$\cos\alpha' = (a_1\cos\alpha + b_1\cos\beta + c_1\cos\gamma)\frac{F}{F'}$$

$$\cos\beta' = (a_2\cos\alpha + b_2\cos\beta + c_2\cos\gamma)\frac{F}{F'}$$

$$\cos\gamma' = (a_3\cos\alpha + b_3\cos\beta + c_3\cos\gamma)\frac{F}{F'}$$

mijenjaju na površini S svagdje b e s p r e k i d n o s funkcijama $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Kvadriramo li i zbrojimo sve tri jednadžbe, to izlazi, da je $\frac{F}{F'}$ funkcija od $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Odatle se vidi, da jednomu istomu smjeru $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ako on pripada i različnim vrijednostima vektora F (vrijednostima u različnim točkama od S), odgovara uvijek s a m o j e d a n smjer $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$. Svakoj točki pomoćne plohe S_k, do koje nas vodi integral I načinjen s vektorom F, odgovara samo j e d n a točka pomoćne plohe S'_k, do koje nas vodi integral načinjen s vektorom F'; i obrnuto. Dvjema točkama plohe S_k, koje su beskrajno blizu, odgovaraju dvije točke plohe S'_k, koje su beskrajno blizu. Dva elementa, koji korespondiraju $d\sigma_k$ i $d\sigma'_k$, imaju uvijek isti predznak ili uvijek protivni predznak, što se može opet razmatranjem tetraedara dokazati. Elementi pomoćne plohe S'_k topološki se istim načinom drže jedan drugoga, kao i elementi plohe S_k. Ploha S'_k jednako mnogo puta pokriva kuglu, kao i ploha S_k. Vrijednosti transformiranoga i danog integrala jednake su, makar da pojedinomu elementu $d\sigma$ plohe S ne odgovaraju jednaki elementi $d\sigma_k$ i $d\sigma'_k$.

Ali linearne relacije ovoga paragrafa sasvim su specijalan slučaj srodnosti dvaju vektor-polja, koja vodi do jednakih integrala I. Da možemo općenitije kazati, definirat ćemo „topološki ekvivalentne“ plohe. To neka budu takove dvije plohe S_k i S'_k, što pokrivaju kuglu, koje se mogu besprekidno jedna u drugu deformirati, a da ih ne treba kod toga prevući preko središta. (N. pr. s plohom S_k, koja kuglu pokriva na većem dijelu jedanput, a na ostalom dijelu tri puta, t. j. koja čini nabor, topološki je ekvivalentna ploha, koja kuglu pokriva samo jedan put, t. j. nema nabora). Ako između dva vektor-polja postoji takova srodnost, da im odgovaraju topološki ekvivalentne pomoćne plohe S_k, onda su integrali I jednaki.

§ 17. *Višestruke nul-točke i nul-crte.* — Ako se u razmatranom prostoru nalaze višestruke nul-točke ili nul-crte, treba ova nul-

Digitized by Google

mjesta opkoliti prikladnim malenim zatvorenim plohama S' i tim ih iz razmatranoga prostora izlučiti. Integrirati treba onda preko zadane međe S i pridodanih međa S'.

Primjeri:

Potencijal Laplaceova gibanja neka je $r^n P_n(\cos\vartheta)$, gdje je P_n Legendreov polinom. Oko nul-točke kao središta načinimo kuglu s malenim polumjerom. Gibanje je simetrično oko osi $\vartheta = 0$. U oba pola kugle i u $n-2$ paralele smjer je brzine paralelan s osju. Polovi i te paralele rastavljaju kuglu u 2 kapice i $n-3$ pojasa ($n > 2$). Integrirajući preko jedne ovakove zone pokrivamo pomoćnu kuglu plohom S_k jedanput. Kod prijelaza iz jedne zone u drugu elementi $d\sigma_k$ mijenjaju predznak (da bi se to vidjelo, najzgodnije je kao element $d\sigma$ odabrati malen kvadrat plohe S', što ga čine meridijani s paralelama). Ploha S_k pokriva dakle kuglu $n-1$ puta, ali tako, da se brojevi njenih pozitivnih i negativnih listova razlikuju najviše za 1. Naša je nul-točka ekvivalentna sa $0, +1$ ili -1 običnih pozitivnih nul-točaka.

S ovakvim „Legendreovim" mnogostrukim nul-točkama ekvivalentne su sve onakove mnogostruke nul-točke, za koje ostaje S_k topološki ekvivalentno.

Kao primjer nul-crte uzmimo krug. U ravnini njegovoj neka je brzina naperena svagdje prema najbližoj točki periferije. U upravnoj valjkastoj plohi, koja ide tom kružnicom, neka brzina svagdje ima smjer, koji natrag produžen siječe kružnicu. Opkolimo nul-kružnicu kružnim prstenom, kojemu je os naša kružnica. Spomenuti valjak rastavlja površinu prstena u dva dijela, od kojih je svaki omeđen dvjema kružnicama, u kojima brzine imadu protivne smjerove. Integrirajući preko svakoga ovakovog dijela prstena pokrivamo pomoćnu kuglu jedan put; a ako pripazimo na predznak, vidimo, da na jednom dijelu prstena dobivamo pozitivne elemente $d\sigma_k$, a na drugom negativne. Naša nul-kružnica ima se dakle brojiti kao 0 nul-točaka. — S njom je ekvivalentna kojagod jednostavna nul-crta, koja se dade bez prekida deformirati u kružnicu i koja se najposlije bez „torzije" (v. § 8.) vraća u se. (Može se vidjeti, da ni „torzija" ne smeta.)

§ 18. *Apsolutni broj nul-točaka.* — Picard[1] se poslužio Kroneckerovim integralom, da nađe pravi broj nul-točaka (rješidbi sustava jednadžbi). On nazire u Kroneckerovim resultatima prazninu („uné

[1] C. R. CXIII.

Digitized by Google

lacune"), koju misli da je popunio. Bitno je kod njegove metode[1], da oko zadanoga prostora mora sagraditi prostor, koji ima jednu dimenziju više, i onda se integrira preko međe toga pomoćnoga prostora. Uz interpretaciju § 11. može se zorno pratiti Picardova metoda. Ali Kronecker[2] drži svoje resultate dostatnima i veli o razlikovanju nul-točaka s pozitivnim i negativnim *D.*: „Mais cette distinction, bien loin d' être regrettable, me semble plutôt révéler la vraie nature des choses, cachée jusque-là . . ." To izlazi i iz našega razmatranja, koje je pokazalo, da vrijednost integrala I zavisi samo o smjeru vektora na međi. No dok je zadan samo smjer na međi i ništa drugo, određena je doduše tim razlika broja pozitivnih i broja negativnih nul-točaka, ali apsolutni broj nul-točaka može biti kojigod.

§ 19. *Poraba Kroneckerova poučka kod dvodimenzijonalnoga gibanja, kojemu je smjer na međi tangencijalan.* — Na crtama, koje omeđuju neki dio ravnine, neka brzina ima svagdje smjer tangencijalan. Ni u kojoj od tih crta neka ne bude brzina $=0$. Kroneckerov integral bit će

$$I = \frac{1}{2\pi}\int d\theta,$$

ako je θ kut, što ga čini tangenta s osju apscisa (§ 9. i 10.). Dok razmatrani prostor svagdje samo jedanput pokriva ravninu, nijedan njegov kontur ne siječe sam sebe, tako da obišavši jedan kontur tangenta načini jedan potpuni okret. Lako vidimo, da je sve jedno, u kojem se smislu tekućina giblje duž kontura; predznak promjene smjera ne zavisi o tome. No taj predznak zavisi o tom, idemo li duž izvanjskoga ili duž kojega nutarnjeg kontura. Treba se naime pomicati na svakom konturu u pozitivnom smislu, t. j. tako, da razmatrani prostor stoji uvijek na lijevoj strani. Prema tomu treba se na nutarnjim konturima pomicati u protivnom smislu negoli na izvanjskom. Integracija duž izvanjskoga kontura daje dakle iznos $+1$, a integracija duž svakoga unutarnjeg kontura -1.

Ako je dakle $n-1$ nutarnjih kontura, t. j. ako je prostor n-struko suvisao, izlazi

$$I = (+1) + (n-1) \,.\, (-1) = -n + 2.$$

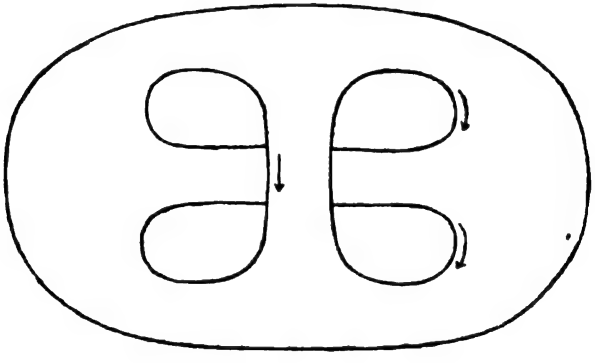
[1] v. Traité d' Analyse T. II. pp. 195—207.
[2] C. R. CXIII.

Digitized by Google

Ako se tekućina giblje u n-struko suvislom ravnom prostoru, tako da je smjer brzine na međi svagdje tangencijalan, a veličina njezina različna od 0, onda je u tom prostoru za $-n+2$ pozitivnih nul-točaka više negoli negativnih.

Kod Laplaceova je gibanja $-n+2$ apsolutni broj (negativnih) nul-točaka (v. § 10.). Za $n=1$ nije moguće Laplaceovo gibanje. Za $n=2$ ono nema nul-točke. Za $n=3$ ima jednu, itd.

Pitanje je, da li taj poučak postoji i za prostore, koji više puta pokrivaju ravninu. (Kroneckerov poučak vrijedi i za njih, kako se možemo uvjeriti, ako takav prostor rastavimo u više prostora, od kojih svaki ravninu samo jedanput pokriva.) Pokus na različnim primjerima, kao n. pr. kod prostora predočena u sl. 4., poka-



Sl. 4.

zuje, da poučak općenito vrijedi. Sl. 4. predočuje 4-struko suvisli prostor sa dva kontura; obilazeći izvanjski kontur činimo 1 pozitivni okret, obilazeći unutarnji činimo 3 negativna okreta; dakle $I=+1-3=-2$, u skladu s gornjim poučkom. Valjada dakle nebi bilo teško dokazati ovaj poučak topologije:

Pomislimo kakavgod n-struko suvisli ravni prostor, koji može ravninu i više puta pokrivati; hoćemo li proći cijelu među ovoga prostora, treba da za $n-2$ više negativnih okreta izvedemo negoli pozitivnih.

§ 20. *Nastavak; nul-točke na međi.* — Kod simbolâ, koji označuju nul-točke na međi, n. pr. $[+-]$, neka se prvi predznak tiče one osi nul-točke, koja je tangencijalna. Jasno je, da duž jednoga kontura, ako mu je krivost svagdje konačna, ima uvijek tâki broj nul-točaka, i da na njemu naizmjence dolaze jedna za drugom

Digitized by Google

nul-točke, kojima simboli imadu različite predznakove na prvom mjestu.

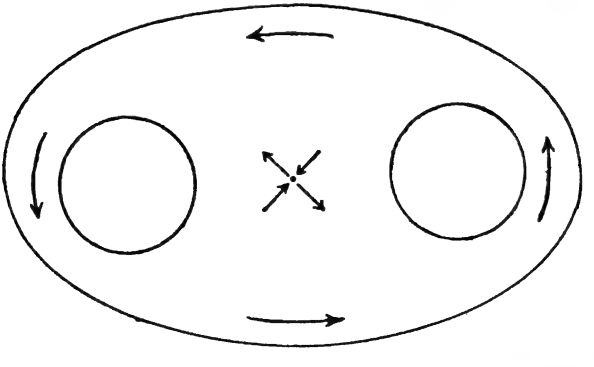
Na izvanjskom konturu n-struko suvisloga dijela ravnine neka bude α pozitivnih i β negativnih nul-točaka. Isključimo ih načinom naznačenim u § 10. Obišavši onda taj (promijenjeni) kontur dobivamo $1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ kao prinos k integralu I. Obišavši u valjanom smislu jedan nutarnji kontur dobivamo $-1 - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\beta_1}{2}$, gdje je α_1 broj pozitivnih, β_1 broj negativnih nul-točaka na tom konturu. Ako je A broj pozitivnih nul-točaka, B broj negativnih na svim konturima, dobivamo zbrojidbom

$$I = -n + 2 - \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$$

Ovo je razlika brojeva pozitivnih i negativnih nul-točaka u nutarnjosti. Dodamo li k tomu još $\frac{A}{2} - \frac{B}{2}$, t. j. razliku brojeva pozitivnih i negativnih nul-točaka na međi računajući svaku od njih $\frac{1}{2}$ puta, dobivamo opet kao u § 19. za razliku brojeva nul-točaka $-n+2$.

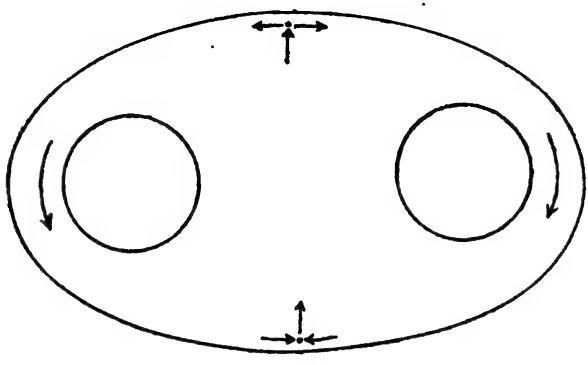
I višestruku nul-točku na međi treba brojiti $\frac{1}{2}$ puta toliko, koliko puta bi se brojila, da je u nutarnjosti.

Primjer. Kod Laplaceova gibanja u 3-struko suvislom prostoru daje $I = -3+2 = -1$ apsolutni broj nul-točaka. Mogući su ovi slučajevi: 1.) 1 nul-točka u nutarnjosti, sl. 5. *a)*; 2.) 2 nul-točke na međi, sl. 5. *b) c)*; 3.) jedna dvostruka nul-točka na međi, sl. 5. *d)*.

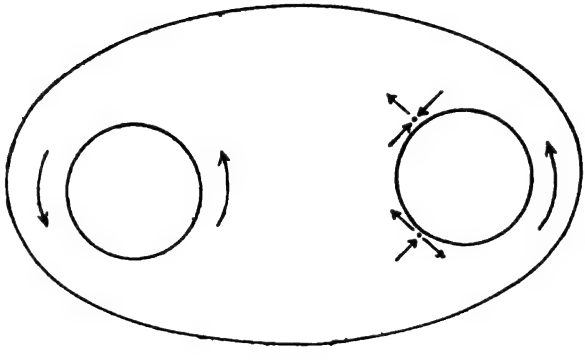


Sl. 5. *a)*

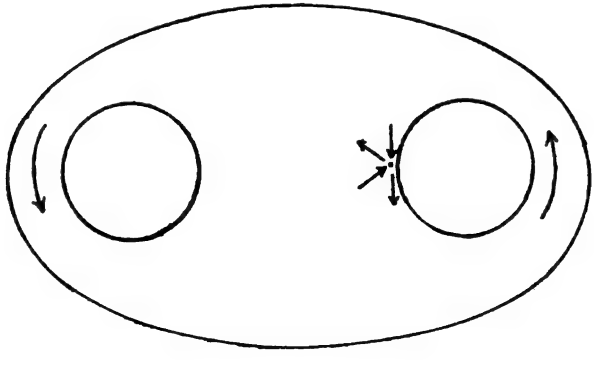
Digitized by Google



Sl. 5. *b)*



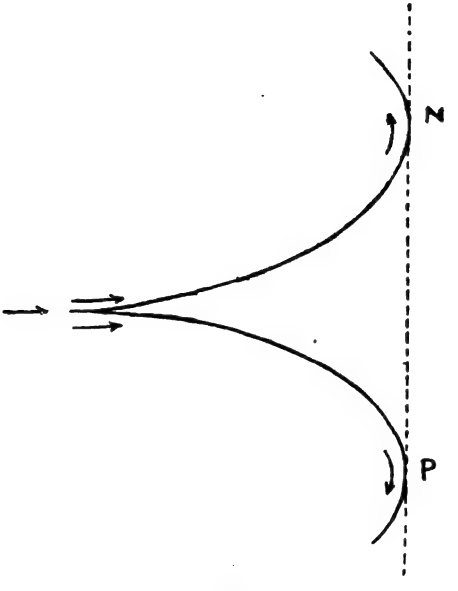
Sl. 5. *c)*



Sl. 5. *d)*

Digitized by Google

§ 21. *Nastavak; druge osobitosti na međi; primjer iz geofizike.* — Krivost međe neka ne bude svagdje konačna; na jednom mjestu neka međa prelazi u šiljak, koji strši u promatrani prostor. Na tom se šiljku struja tekućine rastavlja na dvije struje, koje se protežu duž obaju dijelova međe, što se u šiljku sastaju; v. sl. 6.



Sl. 6.

Šiljak se eliminira time, da se na među spusti dvostruka tangenta NP. Integracija od P preko M do N daje $+\frac{1}{2}$. Šiljak, koji strši u tekućinu, ekvivalentan je dakle s negativnom nul-točkom na međi.

Isto vrijedi za onakova pojedina mjesta na međi, na kojima smjer tekućine nije tangencijalan, nego struja izlazi (ili ulazi) iz promatranoga prostora. Ovakav otvor na međi bit će ekvivalentan s pozitivnom nul-točkom na međi, ako struja odasvud konvergira prema otvoru (ili divergira od otvora), a bit će ekvivalentan s negativnom nul-točkom na međi, ako je otvor premalen, tako da se dio struje mora duž obaju dijelova međe, između kojih je otvor, vratiti u promatrani prostor. Otvor, na koji izlazi (ili ulazi) jedan dio struje u smjeru tangencijalnom, ne utječe na vrijednost integrala.

Digitized by Google

U prirodi nam se pruža prilika, da brojimo nul-točke kod različnih razmatranja. (Mogli bismo razmatrati horizontalni smjer vjetra, kod čega bi se barometarska maksima i minima imala brojiti kao pozitivne nul-točke.) Brojit ćemo nul-točke kod ponešto stalnije pojave morskih struja, n. pr. u Tihom oceanu zimi. Promatram dotičnu kartu Andreeova zemljovida.[1] Uzmimo prostor, kojemu među označuju Behringova cesta, Kamčatka, Kurili, Japan, Filipini, Nova Guineja, Nova Kaledonija, sjevero-ist. Nova Seelandija, južna polarna struja, pa cijela Amerika. Međa toga prostora ima jedan šiljak Aleutske otoke. Ako se ne obazremo na male otočiće, možemo ovaj prostor držati jednostavno suvislim prostorom. U tom prostoru vidi se 6 mjesta, na kojima more miruje. Ta su mjesta: u Behringovu moru; na jugo-istoku Aleutskih otoka; usred onoga dijela Tihoga oceana, koji je nad ekvatorom; ispod Kalifornije; oko Galapagos-otočja; u južnom dijelu Tihoga oceana bliže Americi. Ovih 6 mjesta broji kao 6 pozitivnih nul-točaka. Na međi imamo 8 negativnih nul-točaka [+ −] ili [− +]: kod sjevernoga Japana; kod Filipinâ; između Filipinâ i Guineje; kod Ekuadora; kod južnoga Mexika; kod južnoga rta Kalifornije; kod otokâ kraljice Charlotte; na jugu Aleutâ. K tomu još šiljak Aleutâ i mjesto između Nove Kaledonije i Nove Seelandije, gdje dio južne ekvatorijalne struje izlazi iz našega razmatranog prostora. Imademo onda svega 10 mjesta, koja treba brojiti kao negativne nul-točke na međi. Doista je dakle ispunjena relacija $I = -n + 2 =$
$= -1 + 2 = +1$, jer $+6 - \frac{10}{2} = +1$.

Na nekoliko mjesta, u kojima struje ulaze (izlaze) tangencijalno u razmatrani prostor, nije trebalo uzeti obzir.

§ 22. *Gibanje u zatvorenoj plohi.* — Pomislimo jednostavno suvislu zatvorenu plohu, t. j. plohu, koja se može besprekidno deformirati u površinu kugle. U vrlo mnogo točaka pomislimo nacrtane vrlo kratke strjelice, koje znače smjer brzine. 1. Oko točke M, koja neka ne bude nul-točka, izrežimo krug s vrlo malenim polumjerom. Tim promijenjenu plohu deformirajmo sada u ravninu besprekidnim načinom, tako da svakoj točki plohe odgovara jedna točka ravnine i obrnuto; beskrajno malomu krugu oko M odgovara beskrajno veliki krug u ravnini. Kod deformacije prenijele su se i strjelice u ravninu, pa je svaka nul-točka nakon deforma-

[1] Andrees Allg. Handatlas 1893. 7.

Digitized by Google

cije ostala nul-točkom iste vrste. Sada treba integraciju izvesti preko beskrajno velikoga kruga, t. j. brojiti, koliko puta se smjer brzine okrene, ako jedan put obiđemo taj krug u pozitivnom smislu. Ako obiđemo beskrajno mali krug u nedeformiranoj plohi, smjer se brzine nije ni jedanput okrenuo; na beskrajno velikom krugu deformirane plohe smjer se brzine kod jednoga ophoda okrene 2 puta pozitivno. O tom se možemo uvjeriti, ako načinimo model iz više papirnatih pruga, koje se sastaju u dvije točke A i M, tako da markiraju našu zatvorenu plohu. U okolišu točke M nacrtajmo na svakoj pruzi smjer brzine, dakle paralelne smjerove. Onda uklonimo svezu u M, tako da se pruge drže samo još u točki A, pa rasprostrimo sve pruge u ravninu. Onda se vide ona dva potpuna okreta.

Na jednostavno suvisloj zatvorenoj plohi imademo pozitivnih nul-točaka za 2 više negoli negativnih.

Kontrole radi mogli bismo za točku M odabrati pozitivnu nul-točku. Onda obilazeći jedanput oko beskrajno maloga kruga brzina načini jedan okret; model pokazuje, da obilaženje oko beskrajno velikoga kruga daje samo jedan, i to pozitivni okret. To je trebalo očekivati, jer se jedna pozitivna nul-točka nalazi izvan područja, oko kojega smo integrirali.

Slično pokazuje model opet u skladu s predašnjim: ako se u M nalazi negativna nul-točka, kod obilaženja duž beskrajno velikoga kruga ravnine smjer se brzine 3 puta u pozitivnom smislu okrene.

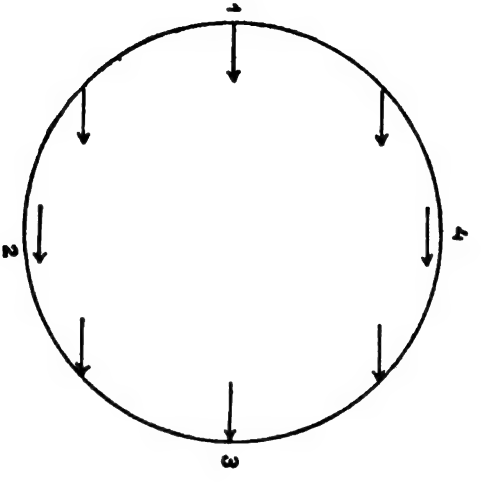
2. Do istoga se resultata dolazi ovim postupkom. Deformirajmo zadanu plohu, tako da bude sve više sploštena, dok se najposlije sasvim ne stlači, tako da dva puta pokriva omeđeni dio ravnine. Tim se ploha raspala u gornji i donji dio. Uvijek možemo stvar tako udesiti, da međašnja crta ne sadržava nijedne nul-točke. Kako se duž međašnje crte ploha prelomila, i to zakretom, koji se svagdje zbio oko tangente konstruirane na tu međašnju crtu, to će brzina u točki pri međi u gornjem i donjem dijelu plohe imati uopće različite smjerove. Ti smjerovi čine s tangentom jednake kutove. Ako u gornjoj plohi brzina ima smjer prema međi, onda ima ispod toga mjesta u donjoj plohi smjer od međe. Smjerovi se dakle u gornjoj i donjoj plohi pri međi podudaraju samo onda, kad brzina ima smjer tangente.

Hoćemo li sada saznati razliku brojeva nul-točaka jedne i druge vrste, treba integrirati (brojiti okrete smjerova) preko međašnje crte držeći je najprije međom gornje, a onda međom donje plohe

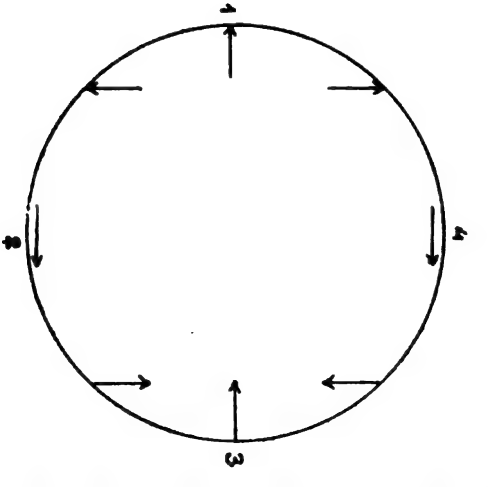
Digitized by Google

Zbroj dobivenih integrala $I_1 + I_2$ tražena je razlika. No kakavgod primjer izmislimo, uvijek izlazi

$$I_1 + I_2 = 2.$$



Sl. 7.



N. pr. u slici 7., gdje je donja ploha ispod gornje bez kretanja odmaknuta nadesno, tako da točke jednakim brojkama označene imadu doći jedna pod drugu, jest $I_1 = 0$, $I_2 = 2$.

Digitized by Google

Da je resultat općenito valjan, izlazi odatle, što je u skladu s resultatom dobivenim kod prvoga postupka.

Uzmimo sada višestruko suvislu zatvorenu plohu, koja se može deformirati u kuglu sa n držaka. Radeći slično, kao malo prije, možemo ovu plohu deformirati u plohu, koja dva puta pokriva omeđeni dio ravnine, koji ima n otvora. Preko svake međašnje crte integrirajmo dva puta: jedan put u gornjoj, drugi put u donjoj plohi. Integracijom preko izvanjskoga kontura dobivamo $I_1 + I_2 = 2$; integracijom preko svakoga unutarnjega kontura $I_1 + I_2 = -2$. Zbroj je ovih integrala

$$I = -2(n-1).$$

Za $n = 0$ izlazi naš predašnji resultat $I = 2$.

Za $n = 1$, kao n. pr. kod površine prstena, $I = 0$.

Plohe suvisle poput prstena jedine su zatvorene plohe, koje mogu biti bez nul-točaka.

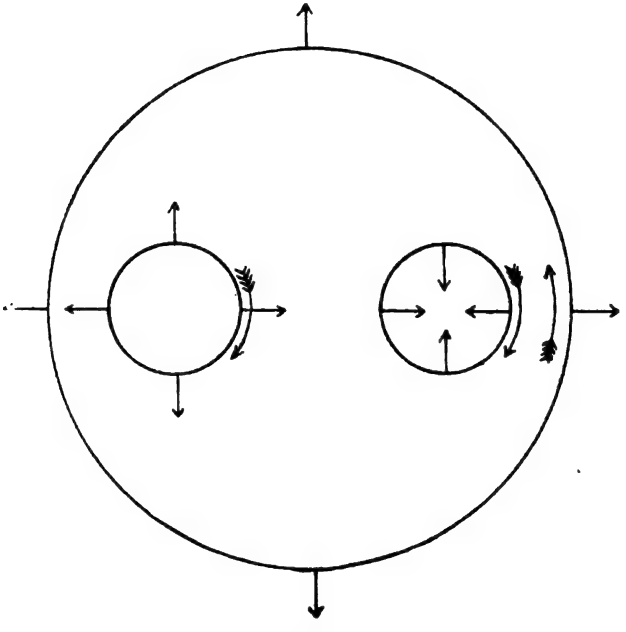
§ 23. *Primjer iz geofizike.* — Gauss je magnetičke polove zemaljske definirao kao točke, u kojima je horizontalni intenzitet $= 0$. Projicirajmo silu magnetičku svagdje u površinu zemaljsku (u plohu niveaua sile gravitacije). U toj jednostavno suvisloj plohi dobivamo vektor-polje, koje ima pozitivnih nul-točaka za dvije više negoli negativnih. Broj je polova dakle svakako paran. I ako se osim poznatih dvaju glavnih magnetičkih zemaljskih polova — koji su pozitivne nul-točke — nađe zbog lokalnih anomalija još koja nul-točka horizontalnoga intenziteta, kao što se našlo u Kurskoj guberniji, onda tih slučajnih polova ima jednako mnogo pozitivnih kao i negativnih.

Pogledamo li kartu sa crtama jednakoga potencijala polja dnevne varijacije zemaljskoga magnetizma (t. j. magnetičkoga polja, koje se superponirano trajnomu magnetičkom polju za 24 sata jedanput oko zemlje okrene), kako ju je sastavio Fritsche[1], vidimo, da ima na njoj 6 polova (a ne — kako Nippoldt veli — 4), naime 3 sjeverna i 3 južna pola, i to od svake vrste po dva pozitivna i jedan negativni. Crte jednakoga potencijala u susjedstvu pozitivnih polova zatvorene su krivulje, koje opkoljuju te polove, a negativni su polovi dvotočke crta jednakoga potencijala, koje imadu oblik nepravilnih osmica.

[1] v. Nippoldta: Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht p. 64.

Digitized by Google

§ 24. *Brzina na međi nije nigdje tangencijalna.* — Ako na međama ravnoga prostora brzina nije nigdje tangencijalna i ako na međama nema nul-točaka, onda je duž jednoga istog kontura smjer brzine svagdje na istu stranu (van ili unutra) prostora naperen. Ako obiđemo izvanjski kontur razmatranoga prostora, smjer brzine načini 1 pozitivni okret; ako obiđemo jedan nutarnji kontur, smjer brzine načini negativni okret. (Sl. 8.; velike strjelice pokazuju smjer integracije.)



Sl. 8.

Na taj slučaj dolazimo, ako imamo u ravnini n atraktivnih i repulzivnih točaka, kojih se sile vladaju po zakonu logaritmičkoga potencijala, a ukupna im je masa različna od 0. Uz posljednju pretpostavku bit će na periferiji vrlo velikoga kruga, koji obuhvata sve tvarne točke, sila svagdje na istu stranu naperena. Opkolimo još svaku tvarnu točku vrlo malenim krugom. Onda integrirajmo. Izlazi $I = -n + 1$ kao apsolutni broj nul-točaka (jer je gibanje Laplaceovo).

Kod toga možemo misliti, da se u neizmjernosti nalazi atraktivna (ili repulzivna) točka. Ako se ta točka iz neizmjernosti pomakne u konačnost, broj nul-točaka nije se promijenio. (Pobliže se

Digitized by Google

to vidi, ako se ravnina savine u površinu kugle.) Onda imademo $n + 1$ točaka, kojih je ukupna masa $= 0$.

Što se tiče slične zadaće trodimenzionalne, počnimo s kuglom. Na površini njezinoj neka ima brzina svagdje smjer polumjera (bilo svagdje van, bilo svagdje unutra). Ploha Sk onda jedanput (bilo $+1$, bilo -1) pokriva pomoćnu kuglu. Besprekidnom deformacijom može se sada zadana kugla pretvoriti u kakvugod jednostavno suvislu zatvorenu plohu, gdje su opet na površini brzine sve van ili sve unutra naperene. Sk prelazi u topološki ekvivalentnu plohu. Integral I zadržava svoju vrijednost.

Uzmimo zatim dvostruko suvisli prostor poput prstena. Besprekidnom deformacijom možemo ga pretvoriti u kružni prsten, a smjerove brzinâ u površini možemo besprekidno tako zakrenuti, da produljeni prolaze kroz os (kružnicu) prstena i da leže u ravninama meridijana. Površina se prstena kao u primjeru § 17. raspada u dva dijela. Dio integrala I uzet preko izvanjskoga dijela prstena jest ± 1, dio integrala uzet preko nutarnjega dijela daje ∓ 1. (Gornji predznak vrijedi, ako tekućina ide svagdje iz prstena van.) Prema tomu $I = 0$.

Trostruko suvisli prostor, koji je opkoljen plohom, koja ima dva drška, možemo besprekidno deformirati u dva kružna prstena, koji su se postrance srasli. Čitava se ploha raspada u dva nutarnja dijela obaju prstena i u jedan izvanjski dio, koji sve opkoljuje (i koji je zgodno uzeti svagdje konveksnim). Integral bit će

$$I = \mp 2 \pm 1 = \mp 1. \text{ Itd.}$$

U kakvomgod n-struko suvislom prostoru, kojemu se površina može pretvoriti u kuglu sa n držaka i kod kojega na površini brzina ima svagdje smjer iz prostora van ili obrnuto, imade za

$$\mp (n-2)$$

pozitivnih nul-točaka više negoli negativnih.

Sličnim načinom, kao u ravnini, možemo naći I, ako imademo Laplaceovo (Newtonovo) polje sila, koje potječe od atraktivnih i repulzivnih točaka. Treba opkoliti svaku tvarnu točku vrlo malenom kuglom i načiniti kuglu s vrlo velikim polumjerom, itd. Kod integracije preko tih međa treba paziti, da ostanemo uvijek na pozitivnoj (izvanjskoj) strani, dakle kod velike kugle na konveksnoj

Digitized by Google

strani, a kod malih kugala na konkavnim stranama. Ako je $\varkappa$ atraktivnih, β repulzivnih točaka, izlazi

$$I = \varkappa - \beta + \begin{cases} 1.) & -1 \\ 2.) & +1 \\ 3.) & 0, \end{cases}$$

gdje treći pribrojnik treba odabrati prema tomu, da li je ukupna masa atraktivnih točaka 1.) veća ili 2.) manja ili 3) jednaka ukupnoj masi repulzivnih točaka.

Kad bismo htjeli čisto matematičkim načinom pronaći integral I, bilo bi već u ovom razmjerno jednostavnom slučaju dosta posla.

§ 25. *Trodimensionalno gibanje, kojemu je smjer na međi tangencijalan.* — Uzmimo prostor omeđen besprekidno zakrivljenom površinom, koja se da deformirati u kuglu s dršcima. Na površini neka ne leže i neka se ne svršuju nul-crte. Ako je smjer brzine na površini svagdje tangencijalan, onda tamo uopće mora biti nul-točaka (v. § 22.). Pitanje je, što vrijedi za broj nul-točaka u nutarnjosti.

Oko svake nul-točke na površini opisat ćemo kuglu s vrlo malenim polumjerom. Svaka će ovakova kugla iz površine S izrezati malen krug, tako da ostaje samo ploha S_1, a iz razmatranoga će prostora izrezati polukuglu. Razmatrajmo ostali prostor. On je omeđen plohom S_1 i s toliko malih polukugala, koliko je na prvobitnoj međi bilo nul-točaka. Sada treba naći, koliko puta pokriva ploha Sk pomoćnu kuglu. Na svakom rubu plohe S_1, t. j. na svakom prijelazu plohe S_1 u polukuglu, sve brzine leže u istoj ravnini. dakle točke od Sk, koje odgovaraju ovakovomu rubu, leže na najvećem krugu pomoćne kugle. Dio od Sk, koji odgovara međašnjoj polukugli, jest polukugla, koju treba uzeti pozitivno, ako je međašnja nul-točka, koja je na tom mjestu izlučena, bila negativna, i obrnuto. Plohi S_1 odgovara dakle dio plohe Sk — zovimo ga Sk_1 —, koji može vrlo zamršenim načinom pokrivati pomoćnu kuglu, a ima toliko otvora — u obliku najvećih krugova —, koliko ima međašnjih nul-točaka. Ako na svaki otvor metnemo još polukuglu, ploha Sk_1 zatvara se i biva Sk.

Sva je teškoća u tom, da se nađe, koliko puta ploha Sk_1 pokriva pomoćnu kuglu.

Prije svega treba spomenuti, kakav predznak imadu elementi $d\sigma k$ u površini S_1 blizu ruba. Na konveksnoj je površini, ako je

Digitized by Google

simbol izlučene nul-točke [+ +], $d\sigma_k$ pozitivno, a negativno, ako je simbol [— —]. Obrnuto je na konkavnoj površini. Na rubu od S_1 oko nul-točke [+ —] $d\sigma_k$ može imati stalan predznak, samo ako je površina zakrivljena poput sedla, i to pozitivan ili negativan predznak prema tomu, u kojoj glavnoj normalnoj ravnini tekućina otječe od nul-točke, a u kojoj pritječe.

Razmatrat ćemo najjednostavnije slučajeve. Iz njih se besprekidnom deformacijom dadu izvesti i najzamršeniji.

Počnimo s kuglom. Njezina površina ima u najjednostavnijem slučaju dvije pozitivne nul-točke. Nije se teško uvjeriti, da u najjednostavnijim slučajevima, što ih možemo izmisliti, površina Sk_1 pokriva pomoćnu kuglu 0 puta, kakvigod bili simboli dviju nul-točaka na međi.

Najjednostavniji je slučaj gibanja u dvostruko suvislom prostoru gibanje u rotacionom prstenu, kod kojega na površini nema nul-točaka, a tekućina se giblje svagdje paralelno s jednom ravninom. Čitava ploha Sk degenerira ovdje u vrlo usku cijev, koja duž najvećega kruga pokriva pomoćnu kuglu.

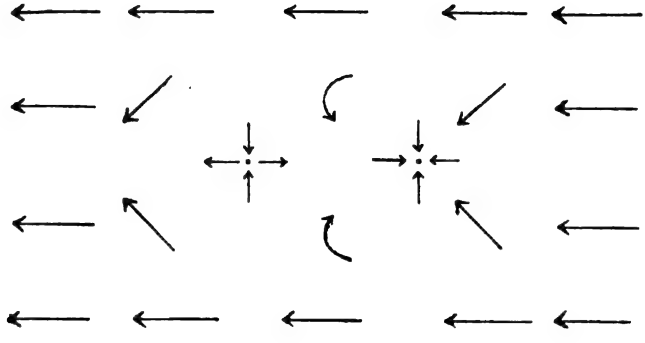
Kod gibanja u trostruko suvislom prostoru imademo u površini bar dvije negativne nul-točke. Prostor neka je nastao time, da su se dva prstena postrance srasla tako, da imamo tri međusobno okomite ravnine simetrije. Najjednostavnija je vrsta gibanja ta, da se smjer brzine nigdje znatno ne udaljuje od jedne ravnine izuzevši okoliš obiju nul-točaka; ove neka stoje u mjestima, gdje je površina zakrivljena poput sedla. Ovo možemo predočiti slikom 5*c*), ako je shvatimo kao prorez (sa jednom ravninom simetrije) trodimenzionalnoga gibanja. Površina Sk_1 nigdje se znatno ne udaljuje od najvećega kruga izuzevši točke, koje odgovaraju okolišu nul-točaka. Ona se na dva mjesta raširuje i svršuje sa dva najveća kruga. Oba ova nastavka, koji se udaljuju od najvećega kruga, zbog simetrije sasvim su jednaki, a predznaci su im prema onome, što smo rekli o nul-točki [+ —] na sedlastoj plohi, protivni. Površina Sk_1 i opet dakle 0 puta pokriva pomoćnu kuglu.

Ovako bismo mogli prijeći k prostoru, što ga čine 3 srasla prstena, koji ima 4 negativne nul-točke itd.

Imademo li na površini osim ovih nužnih nul-točaka još jedan ili više parova drugih (svaki se par sastoji iz jedne pozitivne i jedne negativne), to možemo onaj dio površine S, u koji hoćemo da metnemo par nul-točaka, deformacijom učiniti ravnim i na tom ravnom dijelu površine S paralelnu struju tekućine lokalno pro-

Digitized by Google

mijeniti, tako da tamo budu dvije nul-točke (v. sl. 9.). Stvar izlazi na to, da se u površinu Sk načini zarez duž luka najvećega kruga; a na taj se zarez nadovezuje sada nastavak, koji može vrlo zamršenim načinom pokrivati pomoćnu kuglu, a svršuje se sa dva najveća kruga; no sav taj nastavak zajedno sa svojim rubovima nalazi se u jednoj istoj ravnini, dakle pokriva pomoćnu kuglu 0 puta.



Sl. 9.

Površina Sk_1 pokriva dakle u svakom slučaju 0 puta pomoćnu kuglu. Ako sada trodimenzionalno gibanje u razmatranom prostoru imade na plohi S α pozitivnih, β negativnih nul-točaka, imademo integrirati samo preko $\alpha + \beta$ polukugala, koje opkoljuju međašnje nul-točke. Izlazi

$$I = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

kao razlika brojeva pozitivnih i negativnih nul-točaka sadržanih u nutarnjosti razmatranoga prostora. Ako uzmemo u obzir i nul-točke na površini i brojimo svaku od njih $\frac{1}{2}$ puta, izlazi

$$I = 0.$$

Ako se tekućina na površini nekoga prostora giblje svagdje tangencijalno, ima u tom prostoru jednako mnogo pozitivnih i negativnih nul-točaka; kod toga se pretpostavlja, da se nul-točka na površini drži ekvivalentnom sa $\frac{1}{2}$ nul-točke u nutarnjosti.

Digitized by Google

Jasno je, da to vrijedi i onda, ako razmatrani prostor nije aperifraktičan[1] ili — u drugoj terminologiji — ako mu broj suvislosti treće vrste (prostorne suvislosti) nije 1[2].

§ 26. *Minima Laplaceova gibanja.* — Poznato je, da kod Laplaceova gibanja brzina samo na međi može imati maksimum[3]. Minimum može imati i u nutarnjosti, ali taj minimum može biti samo 0. (Na to se zaboravlja, tako da n. pr. Lamb[3] doslovce veli: „ . . . the velocity may be a minimum at some point of the fluid. The simplest case is that of a zero velocity; . . .“).

Neka bude u točki M minimum brzine v. Možemo pomisliti, da je gibanje sastavljeno od dva gibanja: 1. od gibanja, kod kojega se tekućina giblje poput krutoga tijela sa brzinom v, 2. od gibanja, koje ima u točki M nul-točku. U okolišu te nul-točke 2. gibanja ne smije nigdje smjer brzine sa smjerom brzine v 1. gibanja činiti kut veći od 90^0; inače bismo superpozicijom ovih brzina dobili brzinu manju od v. Ovakove nul-točke, kod kojih u okolišu jedna komponenta brzine zadržava svagdje isti predznak, uopće su moguće (pa i kod potencijalnoga gibanja i kod solenoidalnoga), ali nijesu moguće kod Laplaceova gibanja.

Ovo ćemo ovako dokazati.

Budući da je gibanje solenoidalno, tekućina mora oko nul-točke obilaziti tako, da svakako ima crtâ struje, koje su prema nul-točki konkavne. (T. j. projekcija nul-točke na ravninu krivosti crte struje leži na istoj strani crte struje, na kojoj leži središte krivosti.) No ovakovo gibanje ne može biti potencijalno, kako izlazi iz poučka § 27.

§ 27. *Neko svojstvo potencijalnoga gibanja.* — U točki blizu crte struje brzina je veća negoli u crti struje, ako se točka nalazi na konkavnoj strani crte struje, a manja, ako se nalazi na konveksnoj strani.

Odaberimo u osi x točku M s koordinatama $(x, 0, 0)$; crta struje neka ima smjer osi x. Brzina u točki M ima onda komponente u, 0, 0. Brzina u točki M' $(x + dx, 0, 0)$ ima komponente

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,\ \frac{\partial v}{\partial x}\,dx,\ \frac{\partial w}{\partial x}\,dx.$$

[1] Maxwell: Electricity aud Magnetism 18. 22.; v. Lamb: Hydrodynamics 1895. p. 43.

[2] v. Pascal-Schepp: Repert. d. höh. Math. II. p. 562.

[3] Lord-Kelvin, Phil. Mag. 1850. — v. Lamb: Hydr. p. 42.

Digitized by Google

Ako uzmemo ravninu xy za ravninu krivosti crte struje, imamo

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Brzina u točki N (x, dy, dz) ima komponente

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \quad \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

ali budući da je gibanje potencijalno t. j.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

može se prva komponenta pisati i ovako

$$u + \frac{\partial v}{\partial x} dy.$$

Prema tomu je u točki N kvadrat brzine

$$u^2 + 2u \frac{\partial v}{\partial x} dy + \text{članovi višega reda.}$$

Dakle je brzina u N veća ili manja negoli u M, ako je

$$\frac{\partial v}{\partial x} dy$$

veće ili manje od 0. Tim je gornji poučak dokazan.

§ 28. *Dodatak.* — Da su A, B, C (§ 9.) doista komponente vektora — zovimo ga **A** —, ako su F_1, F_2, F_3 komponente drugoga vektora **F**, o tom se možemo uvjeriti, ako transformiramo koordinatni sustav: prve veličine kongredijentne su sa drugima.

Komponente vektora **A** sagrađene su iz komponenata vektora **F** i njihovih prvih derivacija. Osobito je, da u njihovim izrazima dolaze produkti derivacija. Time vektor **A** ide u red rjeđih vek-

Digitized by Google

tora. Burkhardt[1] je s pomoću teorije invarijanata općeno istraživao vektore, ali samo takove, kojima su komponente racionalne cijele funkcije komponenata danih vektora i njihovih derivacija, a ne sadržavaju derivacija u višoj dimenziji nego li prvoj.[2] On pokazuje, da se svi ovakovi vektori mogu dobiti sa 5 vrsta operacija. Dostaju li te operacije, da se iz vektora $\mathbf{F}$ dobije $\mathbf{A}$?[3]

Izvede li se na vektoru $\mathbf{F}$ operacija $(\mathbf{A}\nabla)$[4], reproducira se taj vektor skalarnim faktorom. Napose ako uzmemo jedinični vektor $\mathbf{f}$, što pripada vektoru $\mathbf{F}$, imamo $(\mathbf{A}\nabla)\mathbf{f} = 0$.

Vektor $\mathbf{A}$ svagdje je solenoidalan izuzevši nul-točke vektora $\mathbf{F}$, gdje $\mathbf{A}$ ima izvore s izdašnošću ± 1. Jednadžba § 9. nije dakle drugo nego specijalni slučaj Gaussova poučka, prema kojemu je ukupni tok struje kroz neku zatvorenu plohu jednak 4π-strukomu zbroju izdašnosti svih izvora, koji se nalaze u prostoru, što je tom plohom omeđen.

To nas upućuje, da bi se od Kroneckerova resultata moglo napredovati u ovom smjeru. Zadan je kakavgod svagdje regularni vektor; treba njime konstruirati vektor, koji je svagdje solenoidalan, samo u nul-točkama zadanoga vektora ima izvore s izdašnošću $+1$. Onda bi bila riješena zadaća o apsolutnom broju nultočaka.

---

[1] Mathem. Ann. 1893.

[2] Mala je netočnost u referatu Abrahamovu u Encycl. d. m. Wiss. IV. 14.

[3] U kojem smjeru Appell (C. R. 1903.) nastavlja Burkhardtova istraživanja (v. Wied. Beibl. 1903.), nije mi poznato, jer su C. R. 1903. ovdje još nepristupne.

[4] v. n. pr. Bucherer: Elemente der Vektor-Analysis 1903.

Digitized by Google

Sur les lieux, dans lesquels la vitesse d'un fluide est zéro.

Résumé.

Dans la première partie de ma dissertation je traite le mouvement dans les environs des lieux (points, lignes, surfaces), dans lesquels la vitesse est zéro. Je considère surtout les mouvements, pour lesquels existe un potentiel des vitesses, et les mouvements, qui n'ont pas des sources.

Dans la deuxième partie j'applique en divers cas le théorème de Kronecker relatif au nombre des racines communes d'un système des équations, contenues dans une domaine. A cause de cela e regar de les côtés gauches des équations comme étant les componentes d'une vitesse. On peut alors interpréter le théorème de Kronecker dans la cinématique. Ainsi il m'est possible de répondre à une question posé par M. Picard (Traité d'Analyse 1891. T. I. p. 127.) Avec cette interprétation le théorème de Kronecker s'applique d'une manière bien simple. Dans l'application on voit aussi je rôle de ce théorème pour la topologie.

Digitized by Google

Prijegled sadržaja.

§ 1. Uvod.
§ 2. Dimenzije nul-mjesta Laplaceova gibanja.
§ 3. Dokaz s pomoću Laplaceove jednadžbe.
§ 4. Dokaz s pomoću teorema cirkulacije.
§ 5. Laplaceovo gibanje u okolišu nul-točke.
§ 6. Veličina gibanja u okolišu nul-točke.
§ 7. Nul-crta potencijalnoga gibanja.
§ 8. Nul-crta Laplaceova gibanja.
§ 9. Kroneckerov poučak.
§ 10. Kinematička interpretacija, ako je prostor dvodimenzionalan.
§ 11. Interpretacija Kroneckerova uvjeta, ako je prostor trodimenzionalan.
§ 12. Drugi način interpretacije.
§ 13. Jednostavniji oblik integrala *I.*
§ 14. Geometrijsko značenje izraza pod znakom integrala *I.*
§ 15. Izračunavanje integrala *I.*
§ 16. Odgovor na jedno pitanje Picardovo.
§ 17. Višestruke nul-točke i nul-crte.
§ 18. Apsolutni broj nul-točaka.
§ 19. Poraba Kroneckerova poučka kod dvodimenzionalnoga gibanja, kojemu je smjer na međi tangencijalan.
§ 20. Nastavak; nul-točke na međi.
§ 21. Nastavak; druge osobitosti na međi; primjer iz geofizike.
§ 22. Gibanje u zatvorenoj plohi.
§ 23. Primjer iz geofizike.
§ 24. Brzina na međi nije nigdje tangencijalna.
§ 25. Trodimenzionalno gibanje, kojemu je smjer na međi tangencijalan.
§ 26. Minima Laplaceova gibanja.
§ 27. Neko svojstvo potencijalnoga gibanja.
§ 28. Dodatak.
Résumé.

Digitized by Google